

La Viga Atirantada

Carlos Bellagio¹

cbellg@arnet.com.ar

Resumen

En este trabajo nos proponemos analizar el comportamiento de la viga atirantada, estructura constituida por una viga vinculada a un tirante curvo inferior, que se agrega al sistema con el objetivo de reducir las solicitaciones y deformaciones en la viga.

La viga atirantada admite diversas aplicaciones en estructuras de uso frecuente, como vigas para soportes de cubierta, entrepisos, apuntalamientos, encofrados, pasarelas o tableros de puentes.

En cuanto a los materiales a utilizar podemos realizar distintas combinaciones como es el caso de vigas de madera, hormigón o acero con tirantes de acero o de acero más pretensado.

En este trabajo se realiza el desarrollo analítico para una viga simplemente apoyada. Se logran establecer relaciones entre las características mecánicas y geométricas del conjunto viga - tirante con el fin de evaluar en forma sencilla su comportamiento estructural.

Finalmente se comparan resultados con resoluciones mediante programas de computación y se establecen algunas reglas generales y recomendaciones para optimizar el diseño de la viga atirantada como sistema estructural.

Palabras Claves: Viga – Tirante – Análisis - Dimensionado

¹ Ingeniero Civil, Universidad Nacional de Rosario, 1970. Ex-profesor del Dpto. de Estabilidad de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Actualmente es Profesor en las Facultades de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta y de la Universidad Católica de Salta. Desarrolla su actividad profesional en el área de la Ingeniería Estructural. Este trabajo forma parte de los Proyectos de Investigación de la Facultad de Ingeniería e Informática de la Universidad Católica de Salta. Colaboraron los alumnos D. Radonich, E. Rocabado y G. Rodríguez de la Carrera de Ing. Civil.

1 – Viga atirantada simplemente apoyada con carga uniforme

Para la solución del sistema se utiliza el método de las fuerzas o de las incógnitas estáticas, mostrando para este caso sus ventajas por la simplicidad de su resolución y valorando su importancia didáctica y conceptual para el análisis de algunos problemas particulares como el que desarrollamos en este trabajo.

Suponemos a la viga de luz L vinculada con el tirante inferior de flecha f en el centro del tramo a través de una sucesión continua de bielas indeformables.

Se adopta en la siguiente resolución una función cuadrática para la geometría del tirante, aunque la diferencia en los resultados no resulta relevante en sistemas esbeltos, por ejemplo para vigas con $L/f > 10$, si utilizamos tirantes de geometría de arco de circunferencia.

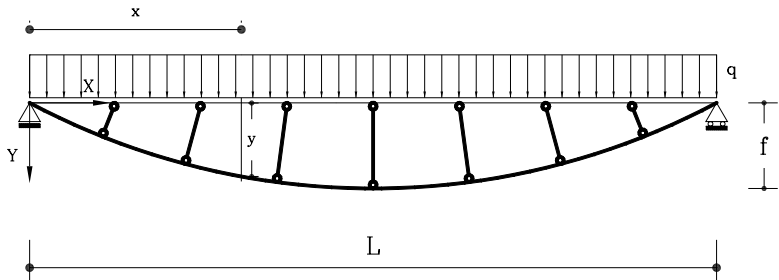


Figura 1 – Viga atirantada simplemente apoyada con carga uniforme

La ecuación del tirante para los ejes definidos en la figura 1 es:

$$y(x) = \frac{4fx(L-x)}{L^2} \quad (1)$$

Si suponemos a la viga axialmente indeformable, el alargamiento del tirante δ se encuentra relacionado con la rotación por flexión de la viga:

$$d\delta = \frac{M(x)dx}{EI} \quad (2)$$

Como el sistema tiene hiperestaticidad interna elegimos el método de las fuerzas para su resolución, cortando el tirante como se observa en la figura 2:

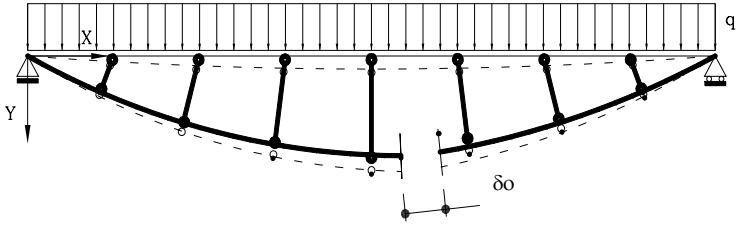


Figura 2 – Sistema fundamental isostático

La expresión de momentos flexores para el sistema fundamental isostático con carga uniforme es:

$$M(x) = \frac{qx}{2} (L - x) \quad (3)$$

Si reemplazamos (1) y (3) en la expresión (2) obtenemos:

$$d\delta_o = -\frac{2qf}{EIL^2} x^2 (L - x^2)^2 dx$$

que integrada a lo largo de toda la viga nos permite calcular el corrimiento entre ambos extremos del tirante cortado debido a la acción de la carga uniforme:

$$\begin{aligned} \delta_o &= -\frac{2qf}{EIL^2} \int_0^L (x^2 L^2 - 2Lx^3 + x^4) dx \\ \delta_o &= -\frac{qfL^3}{15EI} \quad (4) \end{aligned}$$

Aplicamos una acción unitaria en ambos extremos de la sección de corte del tirante, figura 3. Debido a las bielas vinculantes se produce una flexión negativa sobre la viga, efecto equivalente al causado por una carga distribuida hacia arriba. El valor de la carga distribuida equivalente depende de la acción sobre el tirante, unitaria en este caso, y de su radio de curvatura.

$$q_1 = -\frac{1}{R} = y''(x) = -\frac{8f}{L^2} \quad (5)$$

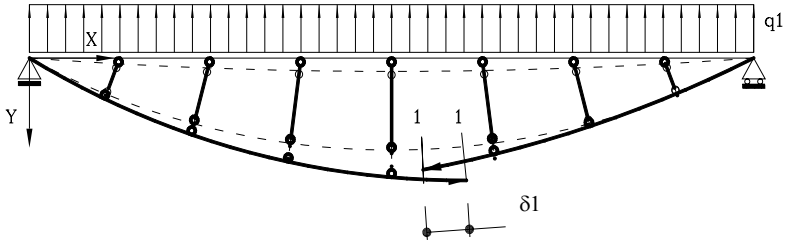


Figura 3 – Acción de la carga unitaria

El corrimiento entre ambos extremos del tirante cortado debido a la acción unitaria resulta:

$$\delta_1 = + \frac{1L}{E_{TIR} A_{TIR}} + \frac{q_1 f L^3}{15EI}$$

Teniendo en cuenta (5) con:

$$n = \frac{E_{tirante}}{E_{viga}}$$

Obtenemos:

$$\delta_1 = \frac{8f^2 L}{15EI} \left[1 + \frac{15I}{8nA_{TIR} f^2} \right] \quad (6)$$

Aplicando la ecuación de compatibilidad:

$$\delta_0 + X\delta_1 = 0$$

y reemplazando en la ecuación anterior (4) y (6) obtenemos el valor de la fuerza en el tirante del sistema hiperestático:

$$X = \alpha \frac{qL^2}{8f} \quad (7)$$

Con:

$$\alpha = \left(\frac{1}{1 + \frac{15I}{8nA_{TIR}f^2}} \right) \quad (8)$$

El valor de q_1 originado por la fuerza en el tirante vale, según (5):

$$q_1 = -\frac{8f}{L^2}x = -q\alpha$$

Con lo que la carga distribuida “resultante” sobre la viga atirantada corresponde al valor $q(1-\alpha)$, en lugar de q para la viga sin tirante.

Definimos:

$$k_1 = 1 - \alpha \quad (9)$$

según (8):

$$k_1 = \frac{1}{1 + \frac{8nA_{TIR}f^2}{15I}} \quad (10)$$

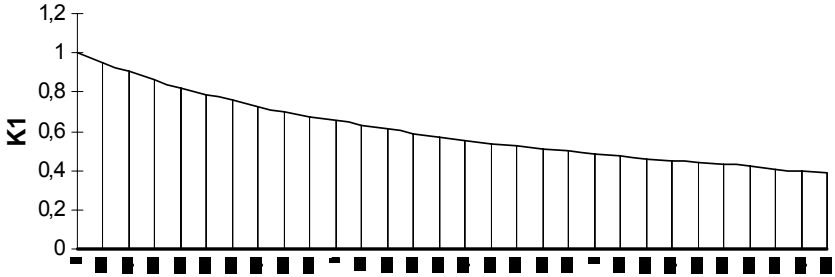
Entonces el máximo momento flexor y el máximo desplazamiento vertical en el centro de la viga son:

$$M_{max} = \frac{(qk_1)L^2}{8}$$

$$v_{max} = \frac{5(qk_1)L^4}{384EI}$$

El coeficiente k_1 nos muestra la reducción de los efectos estáticos y cinemáticos en la viga por la colaboración del tirante. Como se observa en el gráfico de la figura 4 la reducción resulta mayor a medida

que aumenta la flecha y/o la sección del tirante frente a la inercia de la viga.



$$n = \frac{A_{tir} f^2}{I}$$

Figura 4 – Factor de reducción $K1$

2. Viga atirantada simplemente apoyada con carga concentrada

Con las mismas hipótesis y procedimientos del caso anterior analizamos ahora la acción de una carga concentrada sobre la viga atirantada (Fig. 5).

Las expresiones del momento para el sistema fundamental con la carga concentrada son:

$$M_{PO} = \frac{Px(L-x_p)}{L} \quad (11) \quad \text{para } x < x_p$$

$$M_{PO} = \frac{Px_p(L-x)}{L} \quad (12) \quad \text{para } x \geq x_p$$

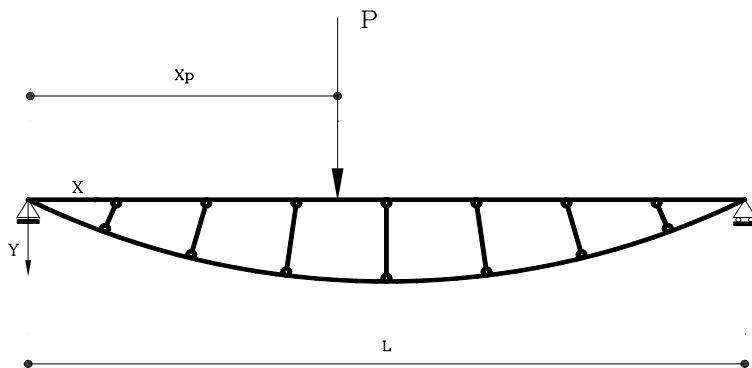


Figura 5 – Viga atirantada simplemente apoyada con carga concentrada

En base a la ecuaciones (1) (2) (11) y (12) determinamos el corrimiento entre ambos extremos del tirante cortado debido a la acción de la carga concentrada:

$$\begin{aligned} \delta_0 &= - \int_0^{x_p} \frac{P(L-x_p)x}{EIL} \cdot \frac{4fx(L-x)}{L^2} dx - \int_{x_p}^L \frac{Px_p(L-x)}{EIL} \cdot \frac{4fx(L-x)}{L^2} dx = \\ &= - \frac{4Pf}{EIL} \left[\int_0^{x_p} (L-x_p)(L-x)x^2 dx + \int_{x_p}^L (L-x)^2 x_p x dx \right] \end{aligned}$$

Integrando y operando obtenemos:

$$\delta_0 = \frac{Pfx_p^2}{3EIL} \left[\left(-\frac{2x_p}{L} + \left(\frac{x_p}{L} \right)^2 + \frac{L}{x_p} \right) \right]$$

Si definimos:

$$\beta = \frac{x_p}{L} \quad (13)$$

Entonces:

$$\delta_0 = \frac{PfL^2\beta}{3EI} [1 + \beta^2(\beta - 2)]$$

Con el mismo valor de δ_1 del caso anterior y aplicando nuevamente la ecuación de compatibilidad obtenemos la fuerza en el tirante:

$$X = \frac{5PI\beta}{8f} [1 + \beta^2(\beta - 2)]\alpha \quad (14)$$

La carga distribuida equivalente originada por la fuerza en el tirante es ahora:

$$q_1 = -\frac{5P\beta}{L} [1 + \beta^2(\beta - 2)]\alpha \quad (15)$$

Entonces el comportamiento de la viga atirantada con carga concentrada corresponde a la superposición del caso isostático cuya flexión responde a la expresiones (11) y (12) más la acción de una carga distribuida equivalente de signo negativo según (15), como se observa en la figura 6.

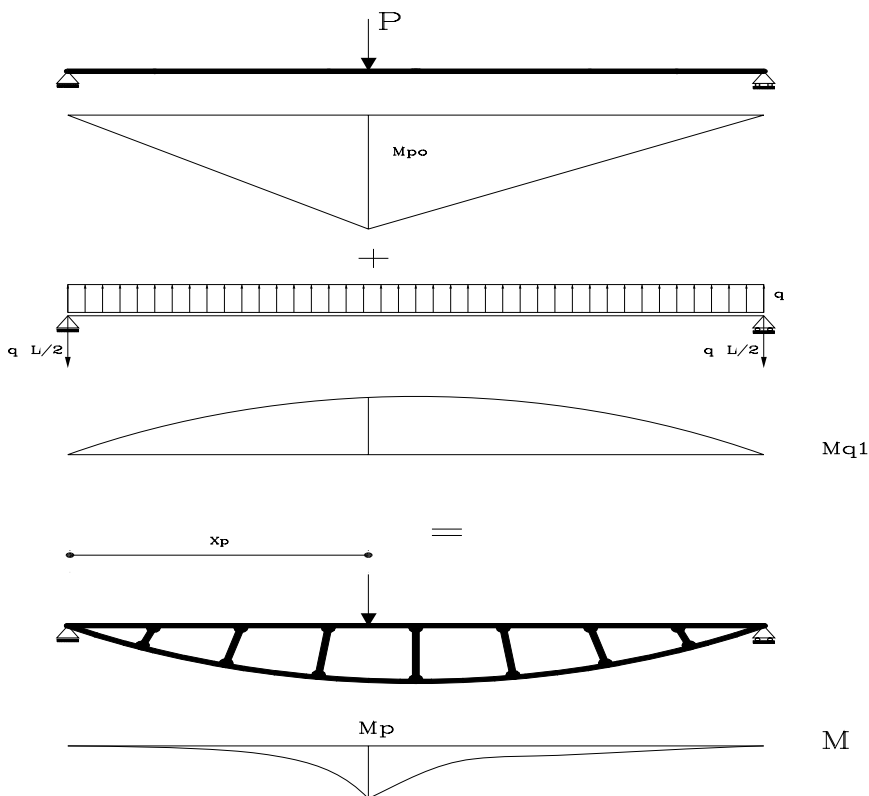


Figura 6 – Superposición de efectos

El máximo momento de la viga atirantada se produce debajo de la carga concentrada y su expresión es:

$$M_{p\text{ máx.}} = \frac{Px_p}{L}(L - x_p) + \frac{q_1L}{2}x_p - \frac{q_1}{2}x_p^2$$

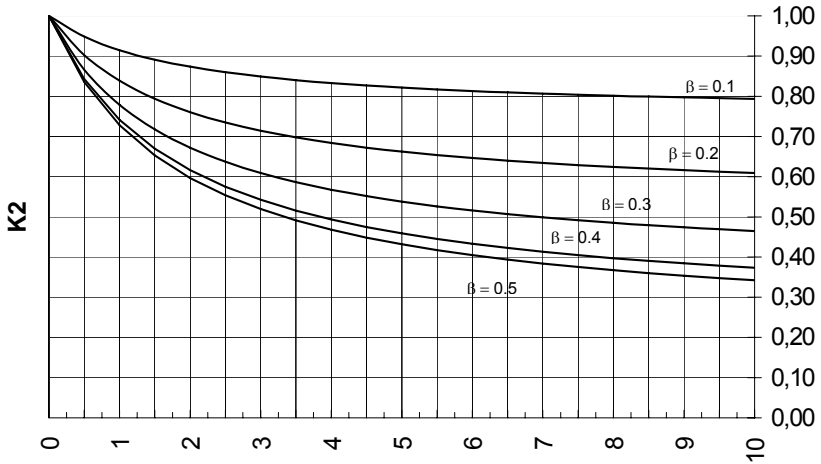
Teniendo en cuenta las expresiones (13) y (15) obtenemos:

$$M_{p\text{ máx.}} = \frac{Px_p}{L}(L - x_p) \dots k_2$$

donde:

$$k_2 = 1 - \frac{5\beta}{2}(1 + \beta^2(\beta - 2))\alpha \quad (16)$$

Se observa en la figura 7 la variación de la constante k_2 que reduce el momento máximo debajo de la carga aplicada debido a la colaboración de tirante.



$$n \cdot \frac{A_{tir} f^2}{I}$$

Figura 7 – Factor de reducción K_2

3. Resolución con programas de computación

Con el fin de comparar resultados se realizaron algunos ejemplos como el que se muestra en la figura 8. En este caso el tirante está compuesto por 6 tramos rectos cuyos puntos de quiebre responden a una ecuación de arco de circunferencia. Las 5 bielas de unión son radiales respecto al mismo arco de circunferencia.



Figura 8 – Viga atirantada discreta

El sistema se resolvió para carga uniforme y concentrada en distintas posiciones, cuya configuración de momentos se observa en el figura 9.

Como se puede apreciar en la Tabla I, los resultados para distintas relaciones de rigidez entre el tirante y la viga son similares a los obtenidos utilizando las expresiones analíticas desarrolladas.

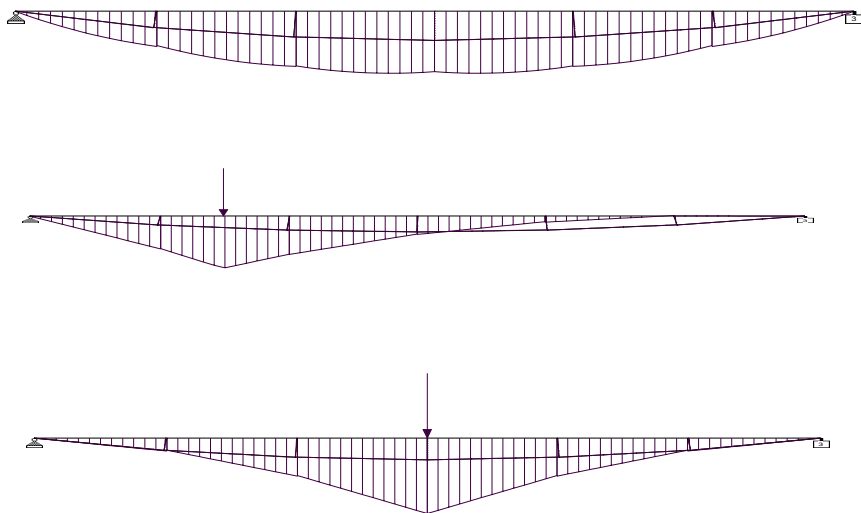


Figura 9 – Diagramas de Momentos

4 – Conclusiones

El procedimiento desarrollado permite estimar el comportamiento de la viga atirantada en función de la geometría del tirante y las rigideces de sus elementos. En primer lugar fijamos un valor de α según la ecuación (8). Luego con las expresiones (7) ó (14) determinamos la fuerza en el tirante. Finalmente con los coeficientes k_1 y k_2 según (10) ó (16) evaluamos los efectos en la viga.

En cuanto a optimizar el funcionamiento del sistema podemos afirmar que si el tirante es muy débil frente a la viga su colaboración es despreciable y no se justifica. Por otro lado si el tirante es demasiado rígido la viga se comporta como continua de varios tramos apoyada en bielas alterando el concepto de viga atirantada. Se estima obtener un buen comportamiento del sistema para valores del factor $n A_t f^2 / I$ entre 2.5 y 3.0.

Mediante la utilización de la viga atirantada se pueden diseñar estructuras livianas con una diversidad de aplicaciones.

La combinación de vigas de madera con tirantes de acero redondo resulta de utilidad para entresijos de madera o cubiertas. En este último caso como se observa en la figura 10, la viga puede tener un trazado quebrado, apropiado también para pasarelas peatonales.



Figura 10 – Viga atirantada quebrada

En el caso de puentes en caminos secundarios podemos elegir el conjunto viga – tirante de acero con tablero de madera, figura 11. En vías de comunicación importantes resulta apropiada la combinación de acero para el tirante con vigas mixtas de acero – hormigón, figura 12.

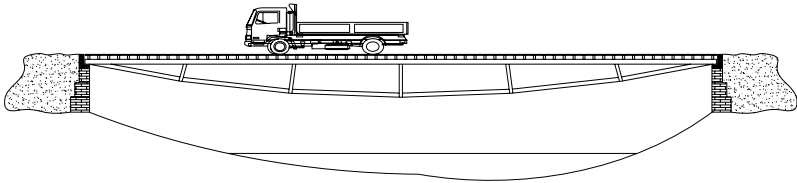


Figura 11 – Viga atirantada de acero

En luces superiores a 20 metros se puede optimizar el diseño con la utilización del pretensado al agregar cables envainados engrasados en el interior de la sección del tirante. El pretensado actúa a través de las fuerzas de desvío en el quiebre de cada tramo del tirante, sumando una acción equivalente a una carga distribuida negativa sobre la viga.

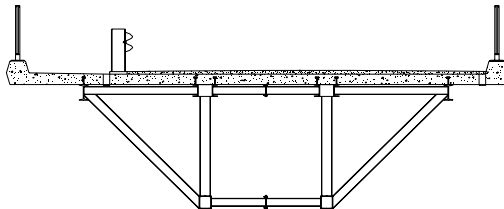
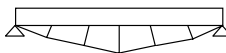


Figura 12 – Viga atirantada de hormigón y acero

Debido a que se obtienen estructuras muy livianas, sobre todo para el caso de cargas de tránsito, es necesario controlar deformaciones y vibraciones del sistema.

Tabla I - Ejemplo comparativo de resolución

Estado 1 a distribuida considerada (KN/m) = 10,00
 Momento máximo sin tirante (KNm) = 125,0



Viga	A_t (cm ²)	$nA_t f^2/l$	k_1	$M_{m\acute{a}x.}$ (KNm)	X (KN)	$v_{m\acute{a}x.}$ (mm)	Resoluc.	$L/v_{m\acute{a}x.}$
I 400	4,91	0,42	0,82	102,1	45,8	17,3	Analítica Programa % Diferenc.	577
				102,8	44,4	17,8		
				0,66	-3,07	2,58		
I 320	6,16	1,23	0,60	75,5	99,1	29,9	Analítica Programa % Diferenc.	334
				76,4	95,3	31,6		
				1,22	-3,94	5,30		
I 280	8,55	2,82	0,40	50,0	150,1	32,6	Analítica Programa % Diferenc.	306
				53,2	144,0	36,4		
				6,11	-4,24	10,32		

Estado 2 xp (cm) = 250,00

$\beta = 0,25$

Carga concentrada considerada (KN) = 65,00
 Momento maximo sin tirante M_{po} (KNm) = 121,9



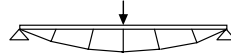
Viga	A_t (cm ²)	$nA_t f^2/l$	α	k_2	$M_{pm\acute{a}x.}$ (KNm)	X (KN)	Resoluc.
I 400	4,91	0,42	0,18	0,90	109,5	33,1	Analítica Programa % Diferenc.
					108	32,3	
					-1,35	-2,52	
I 320	6,16	1,23	0,40	0,78	95,0	71,7	Analítica Programa % Diferenc.
					94,5	69,6	
					-0,52	-2,99	
I 280	8,55	2,82	0,60	0,67	81,1	108,6	Analítica Programa % Diferenc.
					81,5	106,0	
					0,44	-2,47	

Estado 3

$x_p \text{ (cm)} = 500,00$

$\beta = 0,50$

Carga concentrada considerada (KN) = 65,00
 momento maximo sin tirante M_{po} (KNm) = 162,5



Viga	$A_t \text{ (cm}^2\text{)}$	$nA_t f^2 / l$	α	k_2	$M_{p\text{m}\acute{a}x.} \text{ (KNm)}$	X (KN)	Resoluc.
I 400	4,91	0,42	0,18	0,86	139,3 137 -1,65	46,5 45,3 -2,60	Analítica Programa % Diferenc.
I 320	6,16	1,23	0,40	0,69	112,2 112 -0,18	100,6 97,2 -3,51	Analítica Programa % Diferenc.
I 280	8,55	2,82	0,60	0,53	86,3 87,2 1,06	152,4 147,0 -3,70	Analítica Programa % Diferenc.