Cuadernos de Ingeniería. Nueva Serie. Revista de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Católica de Salta (Argentina), Volumen 15, 2024

Endomorfismos en R^2: cambio de base y los modos de pensar en Álgebra Lineal

Endomorphisms in R^2: change of basis and ways of thinking in Linear Algebra

Rosana Mabel Colodro[1], Carlos Berejnoi[1]

Enseñanza de la Ingeniería/ artículo científico

Citar: Colodro R.M. y Berejnoi C. (2023). Endomorfismos en R^2: Cambio de base y los modos de pensar en Álgebra Lineal. *Cuadernos de Ingeniería* (15). http://revistas.ucasal.edu.ar

Recibido: agosto/2023
Aceptado: diciembre/2023

Resumen

Con el objeto de contribuir a una mejor comprensión por parte de los estudiantes del tema Cambio de Base en Endomorfismos de R^2, se implementó en la tarea docente la teoría de los modos de pensamiento Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural propuestos por Anna Sierpinska e inducidos por los lenguajes geométrico, aritmético y algebraico y una variedad de representaciones semióticas. Para esto, se diseñaron actividades didácticas donde se articulan dichos lenguajes y representaciones, posibilitando así el tránsito entre los diferentes modos de pensar el cambio de base en endomorfismos de R^2. Se empleó un enfoque cuantitativo con posprueba únicamente. Se seleccionaron al azar dos grupos: el experimental y el de control. A los efectos de evaluar el diseño, se implementó la posprueba a ambos grupos. En el grupo experimental, se observó un mayor dominio del tema de estudio, lo que resultó en una interpretación geométrica más sólida en R^2, así como un uso preciso de definiciones y propiedades, con muy buen desempeño en la manipulación de matrices asociadas al endomorfismo en distintas bases. En cambio, los alumnos del grupo de control, no pudieron establecer una conexión entre los modos de pensamiento, lo cual repercutió en la comprensión del tema en estudio.

Palabras clave: enseñanza, cambio de base en endomorfismos, modos de pensamiento, lenguajes, representaciones semióticas.

Abstract

The Synthetic-Geometric, Analytic-Arithmetic, and Analytic-Structural modes of thinking theory proposed by Anna Sierpinska, induced by the geometric, arithmetic, and algebraic languages and a variety of semiotic representations were implemented in the teaching task in order to contribute to a better understanding of the topic Base Change in Endo-

[1] Universidad Nacional de Salta, Salta, Argentina

morphisms of R^2 among students. For this purpose, didactic activities were designed considering these languages and representations, thus enabling the transition between the different ways of thinking and the change base of endomorphisms of R2. It was only implemented a quantitative approach together with a post-test. Two groups were randomly selected: the experimental and the control groups. For purposes of evaluating the design, the post-test was implemented for both groups. Regarding the experimental group, a greater mastery of the study topic was observed, which resulted in a more solid geometric interpretation of R^2, as well as a precise use of definitions and properties, with very good performance considering the manipulation of matrices associated with endomorphism of different bases. On the other hand, the students of the control group could not to establish a connection between the modes of thinking, which impacted on their understanding of the topic under study.

Keywords: teaching, base change in endomorphisms, modes of thinking, languages, semiotic representations.

1. Introducción

Algebra Lineal y Geometría Analítica (A.L.G.A) es una asignatura que forma parte de los planes de estudio de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (Argentina). Tradicionalmente ha sido una asignatura cuyos contenidos son difíciles de comprender, debido al carácter abstracto de los mismos. Esto hace difícil su aprendizaje, lo que ha llevado a la necesidad de revisar el enfoque docente e implementar estrategias didácticas con el objetivo de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los temas que componen la asignatura. Según varios investigadores, como Harel (1989a), Moore (1995), Sierpinska (2000), Weller et al (2002), y Maracci (2008), hay un amplio acuerdo en la comunidad académica en torno a la dificultad de alcanzar los objetivos de enseñanza y aprendizaje que se establecen para los cursos de álgebra lineal, lo que refuerza lo observado por los docentes de la cátedra de A.L.G.A.

Según Anna Sierpinska (2000), comprender un concepto matemático consiste en ser capaz de abordarlo articuladamente desde los diferentes modos de pensamiento: Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE), alcanzando así niveles superiores de abstracción.

En el ámbito del álgebra lineal cada uno de uno de los tres modos de pensar utiliza un sistema específico de representaciones. Se pueden identificar tres tipos básicos de registros semióticos: el lenguaje geométrico, que se utiliza para ilustrar conceptos como vectores; el lenguaje aritmético, empleado para describir operaciones entre matrices; y el lenguaje algebraico, que se utiliza para formalizar y simbolizar objetos como vectores, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Por consiguiente, los estudiantes deben adquirir habilidades y destrezas para cambiar constantemente de un sistema de representacion a otro con el propósito de abordar y comprender diferentes conceptos y objetos matemáticos. Esta habilidad se lograría mediante el desarrollo de los Modos de Pensamiento (Sierpinska, 2000).

La variedad de representaciones es fundamental para toda actividad matemática, ya que los objetos matemáticos no pueden percibirse directamente y requieren ser simbolizados para expresar el pensamiento (Piaget, 1977a).

Este trabajo se centró en la creación e implementación de actividades didácticas basadas en los modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska (2000) y algunas estrategias de enseñanza como el uso articulado de representaciones y lenguajes geométrico, aritmético y algebraico. La utilización de las representaciones semióticas es necesaria en toda actividad matemática pues los objetos matemáticos no son reales, y por consiguiente se debe recurrir a distintas representaciones para su estudio y comprensión (Oviedo, 2012). Además, en la formulación de actividades, se emplearon estrategias propuestas por Diaz Barriga y Hernández Rojas (1999): ilustraciones, organizadores previos, pistas tipográficas y discursivas, así como objetivos, resúmenes y analogías. Todas estas herramientas didácticas fueron aplicadas con el objetivo de mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje del tema cambio de base en endomorfismos de R^2.

La combinación de los modos de pensamiento y los diversos sistemas de representación permitieron a los estudiantes abordar el cambio de base en endomorfismos desde diferentes perspectivas y desarrollar una comprensión más completa del concepto. El modo analítico aritmético enfocó la atención en los cálculos y manipulaciones algebraicas necesarios para realizar el cambio de base en endomorfismos de R^2; el modo analítico estructural se centró en la teoría estructural, es decir, en las relaciones entre las matrices de un endomorfismo de R^2 dadas en diferentes bases y el modo sintético geométrico facilitó la visualización y la comprensión geométrica de las transformaciones que ocurren durante el cambio de base.

Trabajar con endomorfismos de R^2, en las actividades didácticas diseñadas, tuvo por objeto de que tanto el docente, en la elaboración de herramientas de enseñanza, como el estudiante en su aprendizaje, puedan utilizar los diferentes registros de representación: geométrico, aritmético y algebraico. Es decir, actividades que les permitan promover transiciones e interacciones entre los diferentes modos de pensamiento con el fin de promover la comprensión del tema.

Este trabajo se enfocó en la siguiente problemática de investigación: Una propuesta de diseño de actividades didácticas basadas en los modos de pensamiento ¿favorece la comprensión del tema Cambio de Base en Endomorfismos de R^2, en los estudiantes que cursan la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta?

Atendiendo a la pregunta de investigación se planteó la siguiente hipótesis de investigación: El diseño de actividades didácticas basadas en los modos de pensamiento, favorece la comprensión del tema Cambio de Base en Endomorfismos de R^2 en los estudiantes que cursan la asignatura Algebra Lineal y Geometría Analítica, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta.

Objetivos:

Diseñar actividades didácticas donde se presenten una diversidad de representaciones de manera de estimular en los alumnos los diferentes modos de pensamientos y generar la articulación y el tránsito desde un modo a otro. Con el objeto de propiciar un aprendizaje significativo.

Integrar los modos de pensamiento, los lenguajes, estrategias de enseñanza y la herramienta Geogebra de manera de permitir abordar el concepto desde múltiples perspectivas facilitando una comprensión más sólida y aplicable en contextos más reales.

2. Revisión Bibliográfica y Antecedentes Teóricos

La complejidad intrínseca de los conceptos del Álgebra Lineal y la abstracción de sus métodos hacen que sea particularmente difícil de aprender y enseñar. En este contexto, el tema de cambio de base en transformaciones lineales a menudo resulta especialmente difícil de asimilar por parte del estudiantado.

Esta dificultad lleva a que los alumnos, en ocasiones, opten por buscar técnicas o algoritmos para resolver problemas en lugar de comprender completamente los fundamentos que subyacen en la teoría. En consecuencia, pueden resolver exitosamente algunos ejercicios sin una comprensión profunda del tema en cuestión.

Por ello, en este trabajo se aplica la teoría de Anna Sierpinska con el propósito de introducir una nueva técnica pedagógica en el desarrollo de las actividades en el aula. Esta técnica tiene como objetivo permitir a los estudiantes abordar el estudio del tema desde diferentes modos de pensar el álgebra lineal: geométrica, aritmética y estructural.

Se indagó acerca de investigaciones previas relacionadas con este tema de estudio o temas relacionados al Álgebra Lineal; Sierpinska (2000) y Maturana Peña y Parraguez (2012) resaltan la importancia de que los estudiantes adquieran un entendimiento profundo de las relaciones geométricas que subyacen a los conceptos en el álgebra lineal. Esto implicaría la habilidad de transitar desde el pensamiento sintético-geométrico hacia los modos analítico-aritmético y analítico-estructural, con el objetivo fundamental de comprender en su totalidad el concepto en estudio. Según León (2009), la propuesta didáctica LECA (La enseñanza como aprendizaje) puede ser aplicada como una herramienta para promover el aprendizaje significativo de los espacios vectoriales, ajustando sus fases según el contexto. Bagley et al. (2015) examinaron las formas de pensar de los estudiantes cuando se les presenta un problema de álgebra lineal. Su intención era explorar cómo los estudiantes emplean y coordinan tres modos de pensamiento: computacional, abstracto y geométrico, siguiendo marcos similares propuestos por Hillel (2000) y Sierpinska (2000).

Sierpinska (2000) propone un modelo en el que distingue, desde un plano general, la existencia de dos modos de pensamiento, ambos igualmente relevantes para la construcción del conocimiento matemático: el pensamiento práctico y el pensamiento teórico inspirados en la distinción de los conceptos cotidianos y conceptos científicos (Vygotski, 1964).

Afirma que el alumno comprende los objetos matemáticos del álgebra lineal de forma más práctica que teórica y destaca la importancia de ambos modos de pensamiento en el razonamiento del alumno.

Desde un plano más específico, Sierpinska (2000) distingue tres modos de pensamiento en Álgebra Lineal: Sintético-Geométrico, Analítico-Aritmético y Analítico-Estructural, basados en el análisis histórico y el estudio de los diferentes lenguajes utilizados en la teoría misma del algebra lineal: lenguaje visual geométrico, lenguaje aritmético de los vectores y matrices como listas y tablas de números y lenguaje algebraico de los espacios vectoriales y transformaciones lineales, que pueden ser responsables de sus dificultades en el aprendizaje de los mismos. El lenguaje del Álgebra (es decir el lenguaje escrito) introduce al estudiante a un plano abstracto del lenguaje y esto constituye uno de los obstáculos a los cuales se enfrenta el estudiante en su camino a la comprensión de los conceptos matemáticos estudiados en Álgebra Lineal.

En una de las experiencias realizada en el marco de su investigación, Sierpinska (2000) pretendía que sus estudiantes entendieran la teoría estructural del Álgebra Lineal, entre otros, la definición axiomática de la transformación lineal, pero los mismos no podían entender la misma porque querían comprenderla con una "mente práctica" en lugar que con una "mente teórica". Desde su experiencia, aduce que los estudiantes tienen renuencia en utilizar en su razonamiento el modo de pensamiento Analítico-Estructural y muchas veces tienen dificultad de moverse con flexibilidad de un modo a otro.

Los modos de pensamiento aparecieron en la historia de las matemáticas de una manera secuencial, no sucedió que uno de ellos reemplazara o eliminara a los otros dos. El desarrollo del álgebra debe mucho a su interacción constante; de la geometría analítica de Descartes a las intuiciones geométricas subyacente en la teoría de los espacios de Banach. En su trabajo sobre los cuaterniones, Hamilton frecuentemente quería cambiar de un enfoque algebraico a un enfoque geométrico y viceversa. Su descubrimiento de cuaterniones se produjo mientras él estaba examinando las propiedades geométricas de la multiplicación de números complejos. Además, las raíces intuitivas del formalismo de Grassmann son geométricas. Pero el dato más interesante es que el álgebra lineal puede ser vista como el resultado de una superación de dos obstáculos o dos posiciones dogmáticas opuestas: una que rechaza los números dentro de la geometría (pensamiento práctico) y la otra que rechaza que la "intuición geométrica" pueda ser llevada a un ámbito puramente de la aritmética (pensamiento teórico).

"Es con Leibniz y su Geometría de situaciones que la matemática comenzó a superar la aparente contradicción de las dos perspectivas y trató de sacar el máximo provecho de la complementariedad del pensamiento geométrico y aritmético" (Sierpinska citando a Otte, 1990).

Sierpinska (2000) construye la teoría de los Modos de Pensamiento, con la finalidad de lograr la superación de esas dos posiciones dogmáticas opuestas. El resultado de esta superación, logra dar mayor nivel de abstracción, a los conceptos propios del álgebra lineal, transitando desde modos de pensamiento prácticos hacia teóricos.

Es preferible ver a los modos de pensamiento como igualmente útiles, cada uno en su propio contexto y para fines específicos y sobre todo tener presente que son realmente valiosos en la enseñanza y el aprendizaje del Algebra Lineal cuando están en interacción.

Caracterización de los modos de pensamiento

Según Sierpinska (2000) en la denominación de los tres modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural, la principal diferencia entre los modos de pensamiento "sintético" y "analítico" sobre los objetos matemáticos es que en el primero los objetos son dados, en cierto sentido, directamente para ser descriptos por la mente, mientras que en el modo analítico ellos son dados indirectamente (están solamente construidos por la definición de las propiedades de sus elementos). Por ejemplo, en el modo sintético la línea recta es vista como un objeto predeterminado, situada en algún lugar en el espacio. Se puede hablar de las propiedades de la línea recta, pero estas propiedades solamente describirán la línea, no van a definirla. En el modo analítico, la línea recta es definida como una cierta relación específica entre las coordenadas de puntos o vectores en un espacio de una dimensión dada. Así, el modo sintético pertenece a la manera práctica del pensamiento, y el analítico a la manera teórica del pensamiento. El desarrollo del álgebra lineal comenzó como un proceso de pensar analíticamente el espacio geométrico.

Desde una perspectiva más amplia Sierpinska (2000) distingue en este desarrollo, dos grandes etapas en relación con dos procesos. Uno de ellos fue la aritmetización del espacio, ya que se llevó a cabo en el paso de la geometría sintética a la geometría analítica en R^n. El otro fue la desaritmetización del espacio o su estructuración, con lo que los vectores perdieron las coordenadas que los anclaban al campo de los números y se convirtieron en elementos abstractos cuyo comportamiento está definido por un sistema de propiedades o axiomas.

Estructurado el espacio, se convierte en un sistema algebraico, un conjunto cerrado con respecto a ciertas operaciones. Esta abstracción permite concebir los espacios que son de dimensión infinita y los espacios sobre campos arbitrarios. Los objetos del pensamiento analítico en álgebra lineal, vectores y matrices, pierden su esencia numérica. Ellos no son más “cajas con números”.

Una matriz de $n \; x \; m$ es ahora, en primer lugar, un elemento del álgebra $(M^{n \, x \, m} \; (K))$: conjunto de matrices $n \; x \; m$ sobre el campo K.

En el pensamiento analítico-aritmético se define un objeto mediante una fórmula que le permite su cálculo; en el pensamiento analítico-estructural un objeto se define mejor por un conjunto de propiedades.

La noción de transformación lineal usada tradicionalmente, se define como la sustitución de las variables (por ejemplo, las variables y se expresan como combinaciones lineales de las variables x), que se consideran como el reflejo de un modo de pensamiento analítico-aritmético acerca de las transformaciones. En este enfoque, se entiende o se da por sentado, que x e y son números. Sin embargo, en los textos de grado modernos, la definición es, la mayor parte del tiempo, estructural: la transformación lineal se convierte en una asignación de un espacio de vector a otro, satisfaciendo una cierta condición. Esta condición no da una fórmula para el cálculo de la imagen, porque no entra en la naturaleza de los vectores, que no tienen que ser n-uplas de números, pero pueden ser elementos de cualquier espacio vectorial. Por ejemplo, pueden ser matrices o funciones. En este enfoque, los vectores tienen un significado sólo como elementos de conjuntos estructurales mayores.

Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal utiliza un sistema específico de representaciones.

El modo de pensamiento sintético-geométrico utiliza el lenguaje de las figuras geométricas (lenguaje geométrico). Ejemplos: puntos, líneas, planos, transformaciones geométricas; así como sus representaciones gráficas convencionales.

El modo de pensamiento analítico-aritmético utiliza los lenguajes aritmético y algebraico para definir un objeto mediante una fórmula que permite su cálculo. De este modo, las componentes numéricas de objetos geométricos, como puntos o vectores, son importantes. Así una transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ puede escribirse de la siguiente forma: $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$

El modo de pensamiento analítico-estructural utiliza el lenguaje algebraico, el cual va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas en conjuntos estructurales. Por lo tanto, la transformación lineal se convierte en una asignación de un vector a otro, satisfaciendo una cierta condición. Esos vectores pueden ser elementos de cualquier espacio vectorial; por ejemplo, pueden ser también matrices o polinomios. En este enfoque, los vectores tienen un significado sólo como elementos de conjuntos estructurales mayores.

Estrategias de Enseñanza

Se listan a continuación las estrategias de enseñanza utilizadas durante el desarrollo de las actividades didácticas propuestas en esta investigación, señalando los logros a alcanzar por el alumno (Díaz Barriga y Hernández Rojas, 1999):

Objetivos o propósitos del aprendizaje: enunciado que establece condiciones, tipo de actividad y forma de evaluación del aprendizaje del alumno; busca que el alumno conozca la finalidad y alcance del material y cómo manejarlo, entienda que se espera de él y contextualice su aprendizaje.

Resúmenes: que pueda producir síntesis, abstracción y organización de la información más relevante a aprender, que pueda enfatizar conceptos claves, principios, términos y argumento central. En definitiva, que recuerde y comprenda la información relevante del contenido a aprender.

Ilustraciones: representación visual de los conceptos, objetos o situaciones de una teoría o tema específico (fotografías, dibujos, esquemas, gráficas, dramatizaciones, etcétera). Logro a alcanzar: que el alumno pueda adquirir más fácilmente la codificación visual de la información.

Organizadores previos: información de tipo introductorio y contextual. Es elaborado con un nivel superior de abstracción, generalidad e inclusividad que la información que se aprenderá. Tiende un puente cognitivo entre la información nueva y la previa. Efecto esperado en el alumno: que elabore una visión global y contextual de la información transmitida con el propósito de que dicha información sea más accesible y familiar.

Analogías: proposición que indica con una cosa o evento (concreto y familiar) es semejante a otro (desconocido y abstracto o complejo). Se utiliza para potenciar el enlace entre los conocimientos previos y la nueva información a aprender. Efecto esperado en el alumno: que comprenda la información abstracta y traslade lo aprendido a otros ámbitos.

Uso de estructuras textuales: Organizaciones retóricas de un discurso oral o escrito. Es utilizado con el objeto de recordar y comprender lo más importante de la nueva información. Efecto esperado en el alumno: que recuerde y comprenda lo más importante de un texto.

Finalmente, se propone la siguiente estrategia, siguiendo la teoría de los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000): **uso articulado de representaciones en el diseño de las diferentes actividades didácticas planteadas**. Dichas representaciones se pueden emplear para definir y presentar un mismo objeto matemático de manera de promover la interacción y tránsito entre los tres modos de pensamiento y así permitir una mayor comprensión de los temas impartidos. Busca lograr que el alumno desarrolle, desde lo cognitivo, los diferentes modos de pensamiento: Sintético Geométrico (SG), Analítico Aritmético (AA) y Analítico Estructural (AE).

3. Metodología

3.1. Diseño

En el presente trabajo se llevó a cabo un diseño de corte cuantitativo. Se eligieron al azar dos grupos: uno recibió el tratamiento experimental (grupo experimental) y el otro no (grupo de control). Se utilizó un diseño con posprueba únicamente, para medir el efecto que tuvo en el grupo experimental el uso de las actividades didácticas propuestas (Hernández Sampieri, 2014).

3.2. Muestra y participantes

En el estudio participaron 86 estudiantes, de los cuales 44 integraban el grupo de control y 42 estudiantes el grupo experimental, que cursaron Álgebra Lineal y Geometría Analítica, asignatura de primer año primer cuatrimestre del plan de estudio de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta (Argentina).

Para corroborar que las muestras tomadas al azar son similares se realizó el estudio de Homogeneidad de Muestras antes de realizar la experiencia propuesta. Para este propósito, se recopilaron las notas de la evaluación por tema obtenidas por los estudiantes de cada grupo durante el desarrollo regular de la asignatura. Esta evaluación es realizada de manera obligatoria por la cátedra.

Esta prueba indicó a través de un estudio estadístico, y con suficiente confianza, que la comprensión del tema, cambio de base en transformaciones lineales, se debe a la implementación de actividades didácticas y no a otras causas posibles. Es decir, las diferencias existentes se deben exclusivamente al azar.

3.3. Instrumento

En la investigación se definieron las siguientes variables, según la pregunta planteada y el enfoque elegido:

- **Variable independiente:** Actividades didácticas basadas en los modos de pensamiento propuestos por Anna Sierpinska.
- **Variable dependiente:** Comprensión del tema Cambio de Base en Endomorfismos de R^2.

El instrumento utilizado para la medición de la variable dependiente fue un examen conformado por 8 preguntas, el cual fue elaborado por los docentes investigadores. El mismo fue validado por docentes y ayudantes alumnos de la cátedra. Se tuvo en cuenta para su elaboración los objetivos que se perseguían en este trabajo de investigación, la presentación y claridad de los enunciados, nivel de complejidad de los ejercicios que la constituyen, el orden en el que están expuestos, el tiempo para su realización y una variedad de representaciones semióticas, con la finalidad de que el alumno pueda poner en juego los modos de pensamiento Sintético Geométrico (SG), Analítico Aritmético (AA) y Analítico Estructural (AE), en su razonamiento.

Se aplicó este instrumento, el mismo día y en el mismo horario, a ambos grupos:

Grupo experimental: este grupo inicialmente estaba formado por 42 alumnos, pero se fue desgranando debido a que quedaron libres por parciales o porque abandonaron el cursado. Resolvieron el examen 29 alumnos.

Grupo de Control: Rindieron 37 alumnos de la comisión de control. Este grupo de alumnos no trabajó con las actividades didácticas diseñadas para este trabajo de investigación.

La variable dependiente se operacionalizó mediante la implementación del examen final. La misma no se manipula, sino que se mide para ver el efecto que la manipulación de la variable independiente tiene en ella (Hernández Sampieri, 2014)

Se presenta el siguiente cuadro donde se muestran las dimensiones en que se subdividió dicha variable junto con sus indicadores y la escala de medida aplicada.

DIMENSIONES	INDICADORES	MEDIDAS
Aborda los conceptos matemáticos, para la realización de un problema, desde un modo de pensamiento: AA, AE y SG	Un modo: • AA si realiza operaciones con números y variables sin mencionar definiciones, propiedades o axiomas. • AE si aplica definiciones, propiedades o axiomas, ya estudiados, para resolver un problema. • SG si logra interpretar geométricamente los conceptos.	Un modo.................................[0,40]
Aborda los conceptos matemáticos, para la realización de un problema, desde dos modos de pensamiento: AA y AE AA y SG AE y SG	Dos modos: • AE y AA si menciona y utiliza definiciones, propiedades o axiomas y realiza operaciones numéricas y algebraicas. • AA y SG si realiza operaciones numéricas y algebraicas sin mencionar definiciones propiedades o axiomas e interpreta geométricamente. • AE y SG si menciona definiciones propiedades o axiomas e interpreta geométricamente el concepto.	Dos modos............................(40,60]
Aborda los conceptos matemáticos, para la realización de un problema, desde los tres modos de pensamiento: AA, AE y SG	Tres modos: AA, AE y SG si menciona definiciones propiedades o axiomas, realiza operaciones numéricas y algebraicas e interpreta geométricamente.	Tres modos..........................(60,100]

3.4. Descripción de las Actividades didácticas llevadas a cabo durante la investigación

Las actividades se llevaron a cabo en dos encuentros durante la puesta en práctica del diseño propuesto.

3.4.1. Primer encuentro

En esta clase teórica-práctica, dictada por el docente investigador, se abordaron las definiciones y conceptos del cambio de base en transformaciones lineales. Tuvo una duración de dos horas.

Durante la clase se procuró en todo momento la participación activa de los alumnos mediante el uso de las diferentes estrategias de enseñanza, diferentes lenguajes y representaciones, como así también del software Geogebra, con el fin de lograr:

Establecer un vínculo entre los conocimientos teóricos y los conocimientos prácticos.

Desarrollar en el alumno los diferentes modos de pensamiento, a través de la utilización de los diferentes lenguajes y representaciones.

Cambiar de un lenguaje a otro como así también establecer conexiones entre los modos de pensamiento, de manera tal de que brinden una mayor comprensión de los temas impartidos.

Visualizar los conceptos con ejemplos concretos y de esa manera tener la posibilidad de abordar una situación problemática con la ayuda de una interpretación geométrica.

Superar la resistencia que tienen los alumnos para abordar un concepto desde el modo de pensamiento estructural y por sobre todo superar la poca destreza que tienen para moverse con flexibilidad entre los tres modos de pensamiento.

Contribuir con la ayuda del Geogebra a un aprendizaje dinámico e interactivo durante el desarrollo de la clase.

La clase fue grabada y transcripta. En las Figuras 1a y 1b se presenta la transcripción de solo una parte de la clase impartida en el primer encuentro.

Matriz Asociada y Cambio de Base

Veremos ahora como están relacionadas las matrices asociadas a la transformación lineal $T: V \to W$ respecto a bases distintas.

Consideremos las matrices A y C asociadas a T respecto a diferentes bases.

Sean:

- E y B bases del dominio V de la función vectorial T. Es posible determinar un vector coordenado X_E a partir del vector coordenado X_B, utilizando la ecuación de cambio de base:
  $$\boldsymbol{X_E = PX_B} \quad (\mathbf{1'})$$
  $\boldsymbol{P}$ es la matriz de cambio de base de B a E
- E' y B' bases de W (codominio). De forma análoga a la anterior, el cambio de base de B' a E' está dado por:
  $$\boldsymbol{Y_{E'} = QY_{B'} \Rightarrow Y_{B'} = Q^{-1}Y_{E'}} \qquad (\mathbf{2'})$$
  Q es la matriz de cambio de base de B' a E'

  Q^{-1}es la matriz de cambio de base de E' a B'

Podemos escribir la ecuación matricial, que me representa a la transformación lineal T respecto a E y E':

$$\boldsymbol{Y_{E'} = AX_E} \quad (\mathbf{3'})$$

Nota: A la matriz A asociada a T respecto a E y E', la denotamos de la siguiente manera: $\boldsymbol{A_{EE'}}$

De igual forma sea C la matriz asociada a T respecto de B y B' y consideremos la ecuación matricial de T respecto de estas bases:

$$\boldsymbol{Y_{B'} = CX_B} \quad (\mathbf{4'})$$

Nota: A la matriz C asociada a T respecto a E y E', la podemos denotar de la siguiente manera: $\boldsymbol{A_{BB'}}$

Podemos simplificar gráficamente lo expresado anteriormente

$$T: \quad V \to W$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] & E' \\ B \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"'] & B' \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

Realizando reemplazos:

por $(2')$ tenemos $Y_{B'} =Q^{-1}Y_{E'} \overset{(3')}{=} Q^{-1}AX_E \overset{(1')}{=} Q^{-1}APX_B \overset{(4')}{=} CX_B$

De la última igualdad se puede concluir que:

$$\boldsymbol{C = Q^{-1}AP}$$

Esta ecuación establece una relación entre las matrices A y C asociadas a T respecto a las matrices de cambio de base Q y P.

Dónde tenemos que recordar que podemos utilizar otras formas de denotar las matrices asociadas a T

$$\boldsymbol{A = A_{EE'}}$$
$$\boldsymbol{C = A_{BB'}}$$

Y que las matrices siguientes corresponden a:

$\boldsymbol{Q}$ es la matriz de cambio de base de B' a E'

$\boldsymbol{P}$ es la matriz de cambio de base de B a E

- *Conversación Heurística*
- *Pista tipográfica*
- Registros semióticos presentes:
  - *Lenguaje Algebraico*
  - *Lenguaje Aritmético*
  - *Lenguaje Coloquial*
  - *Esquemas Gráficos*

Figura 1a. Transcripción de la clase impartida en el primer encuentro.

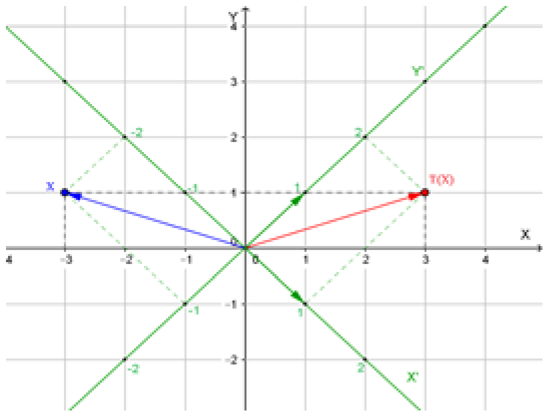
Ejemplo 6: a) Dados los vectores $X_E=(-3,1)\ \wedge\ X_B=(-2,-1)$. Calcule los transformados de los vectores X_E y X_B b) Grafique los vectores X_E y X_B y sus transformados respectivos $T(X_E)$ y $T(X_B)$, en los sistemas de referencia xy e $x'y'$ generados por las bases E y B respectivamente.	• *Exposición problémica*
Resolución a) X_E es un vector cuyas coordenadas están expresadas en la base canónica E por ende se debe utilizar la ecuación (1) de la transformación lineal T para hallar su transformado $T\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X_E}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A_{EE}}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X_E}\Rightarrow T\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}}_{X_E}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A_{EE}}\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}}_{X_E}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ Por tanto $T(X_E)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ Razonando de la misma forma obtengo la imagen del vector X_B pero se hace uso de la fórmula (2) de T respecto a la base B $T\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}}_{X_B}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}}_{A_{BB}}\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}}_{X_B}\Rightarrow T\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}}_{X_B}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}}_{A_{BB}}\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}}_{X_B}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ Por tanto $T(X_B)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	• Registros semióticos presentes: ∘ *Lenguaje Algebraico* ∘ *Lenguaje Aritmético* ∘ *Lenguaje Coloquial* ∘ *Esquemas Gráficos*
b) Graficamos los vectores X_E y X_B y sus transformados respectivos $T(X_E)$ y $T(X_B)$, en los sistemas de referencia xy e $x'y'$ generados por las bases E y B respectivamente. $T\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}}_{X_E}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $T\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}}_{X_B}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 	• Registros semióticos presentes: ∘ *Lenguaje Algebraico* ∘ *Lenguaje Aritmético* ∘ *Lenguaje Coloquial* ∘ *Esquemas Gráficos* ∘ *Representación geométrica de vectores*
Observación: • Podemos visualizar del grafico que la representación geométrica de vector imagen $T(X)$ respecto a bases diferentes no cambia. Sus coordenadas cambian según el sistema de referencia generada por una base de R^2. • Lo observado anteriormente fue corroborado de manera analítica por ustedes.	• Resumen

Figura 1b. Transcripción de la clase impartida en el primer encuentro (continuación).

En esta porción de la clase teórico-práctica dictada por el docente investigador, se destacan las aplicaciones de las estrategias de enseñanza propuestas por Díaz Barriga y Hernández Rojas (1999):

Conversación heurística: esta estrategia buscó orientar el proceso de razonamiento. El docente formuló preguntas de manera secuencial, lo que permitió que los alumnos, a través de sus respuestas, guíen al docente hacia la obtención de la expresión genérica de la ecuación del cambio de base. La interacción activa entre el docente y los estudiantes fomentó la comprensión profunda de los conceptos. En este caso el docente investigador buscó relacionar dos matrices asociadas a una transformación lineal respecto a dos bases genéricas del espacio vectorial R^2.

Pista tipográfica: Señalamiento que se hace en un texto o en la situación de enseñanza para enfatizar y/u organizar elementos relevantes del contenido por aprender. El docente investigador hizo referencia a la ecuación de cambio de base para obtener un vector coordenado en la base canónica a partir del vector coordenado en otra base.

Exposición problémica: En esta estrategia, el docente investigador presentó situaciones problemáticas y, en colaboración con los estudiantes, las resolvió mediante interacción y participación activa. Esta metodología promovió el pensamiento crítico y la resolución de problemas de manera colaborativa. En el desarrollo de la porción de clase, se presentó una situación problemática donde se debió determinar los transformados del vector dado en bases diferentes de R^2, luego se le solicitó el grafico del vector y su transformado en los sistemas de referencia respectivos.

Además, se emplearon diferentes registros semióticos en el desarrollo del tema: el lenguaje algebraico, a través de operaciones aritméticas con variables, y el lenguaje aritmético, mediante operaciones aritméticas con números y el lenguaje geométrico al representar el vector y su transformado en dos sistemas de referencia. Estos enfoques buscaron generar un aprendizaje significativo, siguiendo la teoría propuesta por Sierpinska (2000), y fomentaron el tránsito entre distintos modos de pensamiento, lo que contribuyó a una mayor comprensión del objeto matemático estudiado.

Esto muestra una diferencia con las clases impartidas de forma tradicional, donde en ocasiones solo se presentan las fórmulas de cambio de base en transformaciones lineales, sin una interpretación geométrica y/o justificación teórica respectiva, esto suele deberse a la limitación de tiempo, lo que impide cubrir todos los temas del programa de la asignatura.

3.4.2. Segundo encuentro

Durante este encuentro, los estudiantes trabajaron con una ficha de trabajo que consistía en la resolución de dos ejercicios. Este proceso demandó un período de tres horas. La misma fue diseñada con el propósito de reforzar los tópicos estudiados en la clase dictada por el docente investigador. Trabajaron con la ficha 40 estudiantes de los 42 que conformaron inicialmente el grupo experimental.

El análisis realizado con antelación, por los docentes investigadores, de los ejercicios que forman parte de la ficha de trabajo, tuvo varios propósitos, y uno de ellos fue contrastarlo con la resolución o posibles métodos de resolución empleados por los alumnos. Esto permitió al docente obtener una visión más completa de cómo los estudiantes abordan y resuelven los problemas, lo que a su vez brindó diversos beneficios al docente investigador en su propia práctica pedagógica, tales como:

Evaluación de estrategias de resolución: Al contrastar el análisis realizado por un experto, con las respuestas y métodos de resolución de los alumnos, el docente puede evaluar qué estrategias están utilizando los estudiantes y si están aplicando adecuadamente los conceptos matemáticos aprendidos. Esto le proporciona información sobre el nivel de comprensión y las habilidades matemáticas de los estudiantes.

Diseño de recursos y materiales didácticos: La información obtenida de este análisis y del contraste con la resolución de los alumnos puede servir como base para el diseño de recursos y materiales didácticos más efectivos. El docente puede crear ejemplos y ejercicios que se ajusten a las necesidades específicas de los estudiantes y fomenten un aprendizaje más significativo.

A continuación, se presenta el análisis previo (realizada por el docente investigador) de cada uno de los ejercicios de la ficha de trabajo.

Objetivos de la Ficha de Trabajo

Que el alumno:

- Aborde los problemas aplicando los conceptos necesarios para su resolución.
- Desarrolle a nivel cognitivo los diferentes modos de pensamiento.
- Logre articular los diferentes registros semióticos: algebraico, aritmético y geométrico, fomentando el tránsito entre los diferentes modos de pensamiento.

EJERCICIO 1:

Dado el endomorfismo $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, siendo $A_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matriz asociada a T respecto a la base canónica E de R^2.

a) Encuentre la imagen (transformado) de los vectores de posición (con coordenadas respecto a la base E):
(2,-3), (1,0), (0,2), (-3,1). Represente geométricamente cada vector y su imagen en el sistema de ejes coordenados xy.

b) A partir de la observación e interpretación del grafico anterior, ¿puede identificar geométricamente el endomorfismo T? Corrobore analíticamente, usando la matriz A_{EE}, la conclusión obtenida del análisis grafico realizado.

c) ¿Cuál es la ecuación del eje de simetría respecto al sistema de ejes coordenados xy?

Este problema tiene como intención que el alumno afiance y estimule el proceso de razonamiento y aprendizaje del endomorfismo en la base canónica de R^2 mediante la utilización y articulación de los lenguajes: geométrico, aritmético y algebraico. Para ello se utiliza, el endomorfismo de simetría que posee una representación geométrica concreta en el espacio vectorial R^2.

En la resolución del problema el alumno, a nivel cognitivo, puede hacer uso de los diferentes modos de pensamiento (SG, AA, AE), transitar de un modo a otro e interactuar entre ellos.

El inciso **a)** tiene como finalidad que el alumno incorpore en su razonamiento el modo de pensamiento AA, al manipular la fórmula del endomorfismo para hallar las imágenes de los vectores dados. Como así también debe incorporar el modo pensamiento SG para graficar los vectores y sus transformados respectivos en el sistema de referencia xy generado por la base canónica de R^2.

En el inciso **b)** se espera que el alumno infiera la naturaleza del endomorfismo a partir de la visualización de las representaciones gráficas de los vectores dados y sus transformados respectivos, es decir que haga uso del modo de pensamiento SG para tal fin. Al corroborar dicha observación de manera analítica el alumno hará uso del pensamiento AA como así también del pensamiento AE pues al hacer uso de la propiedad del endomorfismo de simetría mediante la caracterización de su matriz asociada está utilizando en su razonamiento el modo de pensamiento AE.

La respuesta al inciso **c)** se podría dar a partir de la visualización del gráfico lo cual permitiría inferir cuál es la ecuación del eje de simetría. Este tipo de respuesta estaría sustentado en el modo de pensamiento SG que el alumno utilizaría en su razonamiento.

EJERCICIO 2:

Sea $B = \{(1,1),(-1,1)\}$ una base de R^2 y T es el endomorfismo dado en el ejercicio anterior.

a) Determine A_{BB}, matriz asociada a T respecto a la base B y escriba la forma matricial de T respecto a la base B.

b) Dado $v_E = (2,1)$ y $(2,1) = \frac{3}{2}.(1,1) - \frac{1}{2}.(-1,1)$, obtenga v_B.

c) Calcule los transformados de los vectores v_E y v_B.
d) Grafique los vectores y sus transformados en el sistema de referencia xy e $x'y'$ generados por las bases E y B respectivamente. Verifique gráfica y analíticamente que las imágenes no cambian, sino que lo que cambia son sus coordenadas.
e) ¿El endomorfismo respecto a la nueva base B sigue siendo de simetría?
f) Determine la ecuación del eje de simetría respecto al nuevo sistema de referencia $x'y'$ e identifique el mismo, en el gráfico.

El primero y segundo inciso de este ejercicio tienen como propósito afianzar los conceptos vistos en la clase teórica introductoria, como así también que el alumno, en el proceso de resolución de este problema, ponga en juego los diferentes modos de pensamiento a través de la utilización de los diferentes lenguajes propuestos por Anna Sierpinska. Esto tiene por finalidad que el alumno comprenda lo que implica y significa cambiar de base en un endomorfismo de R^2. Con ello se pretende que el alumno adquiera capacidad para moverse con flexibilidad de un modo de pensamiento a otro.

En este ejercicio también se utiliza un endomorfismo de simetría. Con el objeto de ayudar al alumno a visualizar el concepto de cambio de base en un endomorfismo (modo de pensar SG) y que a partir de un aprendizaje significativo logre asimilar los conocimientos relacionados con este tema. Además, se espera que el alumno pueda realizar la abstracción y comprender el tema para el caso de espacio vectorial R^3 y otros espacios vectoriales.

En el inciso **a)**, se busca que el alumno determine la matriz del endomorfismo respecto a la base B. Si en su resolución el alumno utiliza el procedimiento para cambiar de coordenadas a las imágenes de los elementos de la base nueva A_{BB}, estaría utilizando el modo de pensamiento AA. Si en cambio utiliza la definición de matrices semejantes estaría empleando el modo de pensamiento AE ya que estaría utilizando el teorema que relaciona las matrices de T respecto a diferentes bases a través de la matriz de cambio de base (matriz inversible).

El inciso **b)** tiene el propósito de mostrar al alumno que este tema no es un tema aislado de los otros, sino que lo que aprendemos a medida que estudiamos la materia lo vamos a utilizar posteriormente, es decir, todo está conectado y relacionado. Lo estudiado en espacios vectoriales lo utilizamos en este inciso para determinar las coordenadas de un vector respecto a una base diferente a la canónica. Si en la resolución el alumno visualiza las coordenadas del vector en la base B a simple vista, estaría razonando la situación dentro de la estructura de los espacios vectoriales, donde se cumplen ciertas propiedades y definiciones. El modo de pensar empleado sería el modo AE.

Si en cambio utiliza una técnica para calcular las coordenadas de v_B estaría empleando el modo de pensamiento AA, a diferencia de la primera resolución que utiliza la propiedad que define a las coordenadas de un vector.

En el inciso **c)** se solicita que el alumno realice el cálculo analítico de la imagen del vector v en diferentes bases. Para ello debe darse cuenta que debe tomar el vector expresado respecto a una base y reemplazarlo en la transformación lineal expresada en la misma base. Además, darse cuenta que las coordenadas del vector y sus imágenes respectivas cambian al cambiar de base. En este inciso estaría usando el modo pensamiento AA.

En el inciso **d)** se solicita el gráfico del vector y su imagen en distintos sistemas de referencia, para ello el alumno situaría su pensamiento en el modo SG pues estaría utilizando el lenguaje geométrico y el modo AA pues define a los vectores como una relación especifica de coordenadas. Visualizando el gráfico comprobaría que la ubicación del vector y su imagen respectiva no cambia, lo que cambian son sus coordenadas.

La comprobación de lo solicitado en el inciso d) se haría, desde el punto de vista analítico, a través de la utilización de la definición de coordenadas de un vector. El alumno situaría su pensamiento en el modo AE pues estaría contestando la pregunta a partir de una definición dentro de la estructura de un espacio vectorial.

El objetivo del inciso **e)** es que el alumno corrobore de forma analítica que al cambiar de base el tipo de endomorfismo no cambia, sino que preserva su naturaleza. Para responder el problema el alumno se situaría en el modo de pensamiento AE, pues estaría caracterizando el tipo de endomorfismo a través de la propiedad de su matriz asociada respecto a una base determinada.

En el inciso **f)** el alumno podría visualizar el eje de simetría del gráfico y expresar su ecuación. Para ello haría uso del modo de pensamiento SG y AA. O bien podría obtener su ecuación, de forma analítica, a partir de la ecuación de cambio de base en un espacio vectorial. Si este fuese el razonamiento utilizado por el alumno, él estaría situando su pensamiento en el modo AE debido a que utilizaría la propiedad de cambio de base y en el modo de pensamiento SG pues primeramente debería visualizar del gráfico la ecuación del eje de simetría respecto al sistema de referencia generado por la base canónica.

Finalmente se puede decir que con ambos ejercicios se pretende que el alumno adquiera la destreza para trabajar y trasladarse de un sistema de referencia a otro.

4. Resultados

4.1. Análisis de la producción de los alumnos en el segundo encuentro

Este análisis se llevó a cabo considerando la producción de los alumnos en la Ficha de Trabajo. En la Tabla 1, en la segunda columna, se presenta el rendimiento de los alumnos en cada ejercicio, de menor a mayor. En la última columna se describen las acciones realizadas por los alumnos, comenzando con los aspectos negativos, seguidos de lo que lograron y realizaron exitosamente, y finalmente se detalla el modo de pensamiento empleado. Se comparó todo esto con las expectativas previas de los docentes investigadores, plasmadas en los análisis realizados con antelación de los ejercicios de la Ficha. Las Tablas 2 y 3 muestran, respectivamente, ejemplos de la manera que resolvieron los problemas dos alumnos de alto rendimiento (A30 y A33) y tres alumnos de bajo rendimiento (A2, A10 y A20). Las Figuras que se referencian en la Tabla 1, se muestran en las Tablas 2 y 3.

Tabla 1. Análisis de las acciones de los alumnos, modo de pensamiento utilizado y rendimiento por inciso.

EJERCICIO	PORCENTAJE DE RENDIMIENTO	LO ESPERADO	COMPARACIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE LOS ALUMNOS CON LO ESPERADO EN LOS ANÁLISIS PREVIOS
2d	19 %	SG AE	Se evidencia un muy bajo rendimiento en este inciso. Del grupo de alumnos que resolvieron el problema y no obtuvieron puntaje, se observa la siguiente lista de errores cometidos: • No supieron graficar los nuevos ejes a partir de los vectores de la base B. Esto muestra que el tema de cambio de base en espacios vectoriales (tema estudiado con anterioridad) no fue comprendido en su totalidad por algunos alumnos. Entonces muy difícilmente pueda hacer uso del modo de pensamiento AE y AA para resolver el ejercicio. • No especifican las unidades de los nuevos ejes y/o los nombres respectivos. • No logran asociar los conceptos de cambio de base en espacios vectoriales con el cambio de base en transformaciones lineales y con su interpretación geométrica. No saben graficar los vectores y sus imágenes en el nuevo sistema de referencia $x'y'$. Se ejemplifica a través de la resolución que muestra la Figura 15. Del grupo minoritario de alumnos que obtuvieron puntaje, se observó que graficaron de forma correcta los vectores y sus imágenes, detallando cada vector en el sistema de referencia respectivo (Figura 8). Ninguno de los alumnos que obtuvo puntaje verificó analíticamente que las imágenes no cambian, sino que lo que cambian son sus coordenadas. En el análisis previo se esperaba que los alumnos se sitúen en el modo de pensamiento AE pues contestarían la pregunta basándose en una definición dentro de la estructura de un espacio vectorial. Sin embargo, lamentablemente, este objetivo no se cumplió.

2f	27 %	SG AA AE	El porcentaje de rendimiento de este inciso fue muy bajo. Del grupo de alumnos que resolvieron el problema y no obtuvieron puntaje se observa: falta de dominio en el tema ecuaciones de rectas, coordenadas de un vector en una base dada, cambio de base en espacios vectoriales. De los que resolvieron el problema de forma exitosa, la gran mayoría utilizó la ecuación matricial de cambio de base para encontrar la ecuación del eje de simetría en la nueva base. Lo que muestra que el modo de pensamiento utilizado es el AA y AE (Figura 10). Otros, a partir del gráfico, identificaron y encontraron la ecuación del eje de simetría en la base requerida. El modo de pensamiento utilizado por estos últimos alumnos es el SG.
2e	44 %	AA AE	Este inciso tuvo mejor rendimiento que el 2f. Algunos estudiantes no obtuvieron puntaje debido a que no realizaron el ejercicio. De los alumnos que realizaron el inciso y obtuvieron 0 puntos, se observaron las siguientes deficiencias: • No lograron visualizar geométricamente si existe simetría o no en el nuevo sistema de referencia. • No se dieron cuenta que pueden utilizar la matriz de la transformación T en la nueva base para verificar las condiciones de simetría. El modo de pensamiento utilizado por este grupo de alumnos fue el AA. En el grupo de alumnos que realizó el ejercicio y obtuvo el mayor puntaje, se observó interacción entre ambos modos de pensamiento AA y AE. En este grupo de alumnos se cumple el objetivo propuesto para este inciso, fijado en el análisis previo (Figura 9).
1b	54 %	SG AA AE	El rendimiento supera por muy poco el 50 %, pero se esperaba un rendimiento mucho más alto, debido a que los conceptos que se debieran utilizar para resolver este inciso ya fueron estudiados en unidades anteriores. La mayoría de los alumnos que resolvieron el inciso, logró inferir la naturaleza de la transformación lineal a partir de las representaciones graficas de los vectores proporcionados y sus transformados. Y fueron capaces de integrar esta comprensión con la resolución analítica de la tarea solicitada (Figura 11). Otros utilizaron el modo de pensamiento SG y AA para justificar que la transformación dada es una transformación de simetría, pero no lograron integrarlo al modo AE, debido a que no utilizaron la propiedad correcta que define a las transformaciones de simetría. Esta desconexión los llevó a cometer errores conceptuales como por ejemplo concluir que tal endomorfismo es una proyección cuando en realidad es una simetría. Solo unos pocos lograron integrar los tres modos de pensamiento, es decir, fueron capaces de integrar la interpretación geométrica con la resolución analítica de la tarea solicitada (Figuras 3 y 4).

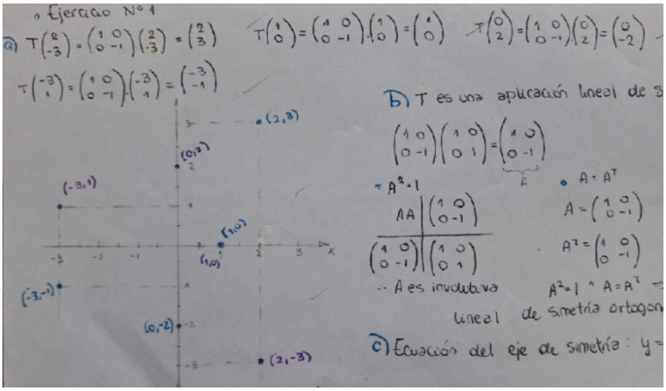
2c	69 %	AA	Entre los errores observados en la resolución del inciso, se visualiza claramente una falta de comprensión en los temas fundamentales, como cambio de base y endomorfismos en R^2. Se aprecia que algunos alumnos no logran diferenciar entre conjuntos y funciones, lo que representa un error conceptual recurrente en los exámenes de esta asignatura. Por otro lado, existe un grupo de estudiantes que sabe que para calcular el transformado deben utilizar una fórmula del endomorfismo, pero no todos saben utilizar la fórmula adecuada, es decir, en la base adecuada con el fin de hallar las imágenes solicitadas (Figura 14). Un buen porcentaje de alumnos realizó el cálculo analítico de las imágenes de los vectores, es decir, se dieron cuenta que deben tomar el vector expresado respecto a una base y reemplazarlo en el endomorfismo expresado en la misma base. Utilizaron el modo de pensamiento AA (Figura 7).
2a	75 %	AA AE	Este inciso arrojó un nivel de rendimiento satisfactorio. De los alumnos que resolvieron este inciso se observa que un porcentaje lo resuelve de forma correcta empleando los modos de pensamiento esperados. Los que resolvieron cambiando las coordenadas a las imágenes de los elementos de la nueva base A_{BB}, usaron el modo de pensamiento AA y los que resolvieron empleando la definición de matrices semejantes utilizaron el modo de pensamiento AE (Figura 5). Sin embargo, otro grupo de estudiantes cometió errores de cálculo o no formalizó adecuadamente la transformación, pero el procedimiento de cálculo de la matriz asociada al endomorfismo fue correcto. En un menor porcentaje se identificaron errores conceptuales debido a la falta de comprensión del tema matriz asociada a una transformación lineal respecto a otras bases (Figura 12).
1c	78 %	SG	El rendimiento de los alumnos en este inciso fue alto. La gran mayoría pudo deducir tanto gráfica como analíticamente la ecuación del eje de simetría (Figura 4). Un pequeño porcentaje de alumnos no supo expresar la ecuación del eje x a pesar de haber inferido geométricamente, en el inciso anterior, de que se trata de una transformación de simetría. Y otro pequeño porcentaje de alumnos no interpretó la consigna, por lo cual no la resolvió, no entendían que es un eje de simetría.
2b	81 %	AE	Este inciso tuvo un alto rendimiento. Dentro de este grupo, la mayoría empleó el modo de pensamiento AE, haciendo uso de la definición de coordenadas de un vector en una base determinada para mostrar las coordenadas del vector v con respecto a la base B (Figura 6). Por otro lado, una minoría de los estudiantes que obtuvieron la puntuación total, basaron su razonamiento en el modo de pensamiento AE y AA, ya que calcularon las coordenadas del vector tomando la ecuación matricial de cambio de base. Muy pocos alumnos no pudieron determinar lo pedido, observándose errores conceptuales en la resolución del inciso (Figura 13).

1a	91 %	AA SG	La mayoría incorporó en su razonamiento el modo de pensamiento AA, al usar la fórmula del endomorfismo para determinar las imágenes solicitadas. Dedujeron, de forma gráfica, que se trata de una transformación de simetría. Incorporaron también el modo de pensamiento SG al graficar los vectores y sus transformados. La mayoría del alumnado logró integrar los modos de pensamiento AA y SG (Figura 2). Este inciso tuvo un rendimiento muy alto.

Tabla 2. Ejemplos de los resultados de los ejercicios 1 y 2 de la ficha, para los alumnos A30 y A33.

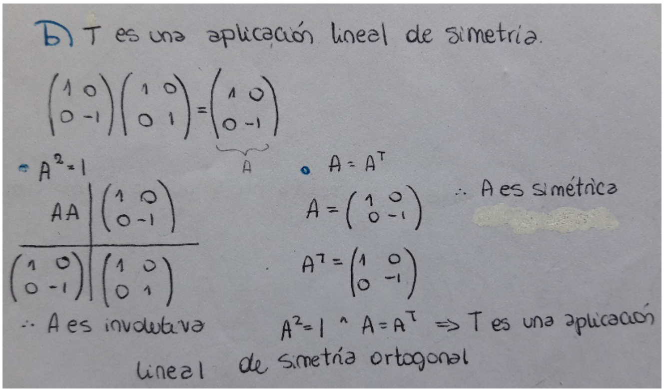
<table>
<tr><th colspan="2">EJERCICIO 1
Ambos alumnos utilizan en su resolución los modos de pensamiento SG, AA y AE.
Se evidencia una comprensión sólida del tema en estudio.</th></tr>
<tr><td>a) A30

Figura 2</td><td>

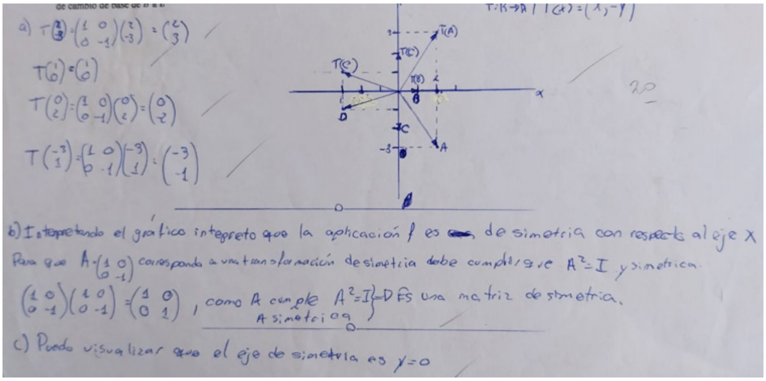
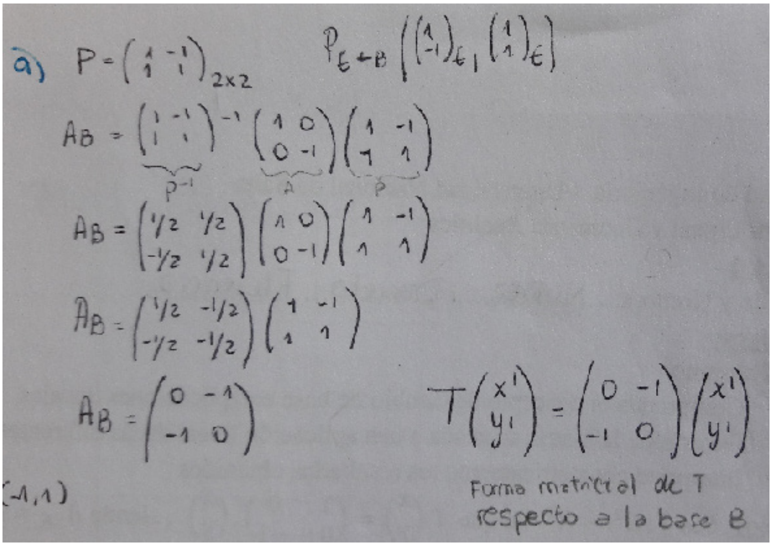
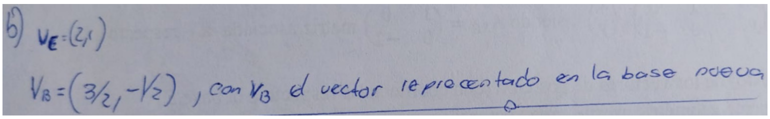
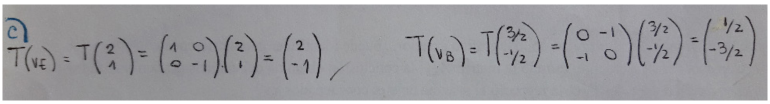


</td></tr>
<tr><td>b) A30

Figura 3</td><td>



</td></tr>
</table>

c) A33 **Figura 4**	
EJERCICIO 2	
a) A30 **Figura 5**	
b) A33 **Figura 6**	
c) A30 **Figura 7**	

<table>
<tr><td>d) A33

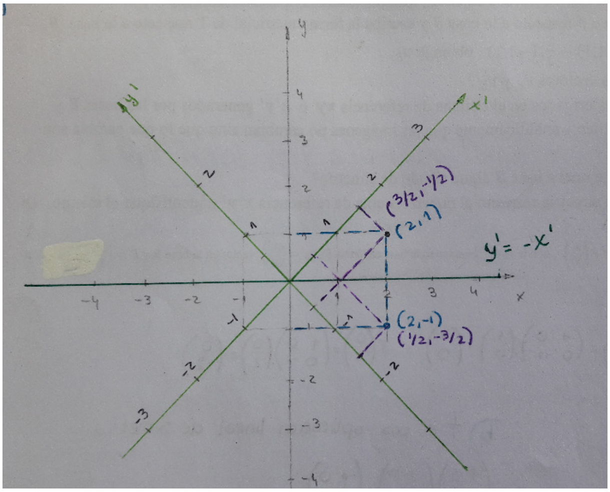
Figura 8</td><td>
</td></tr>
<tr><td>e) A33

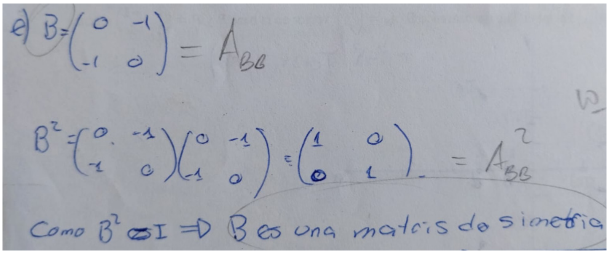
Figura 9</td><td>
</td></tr>
<tr><td>f) A33

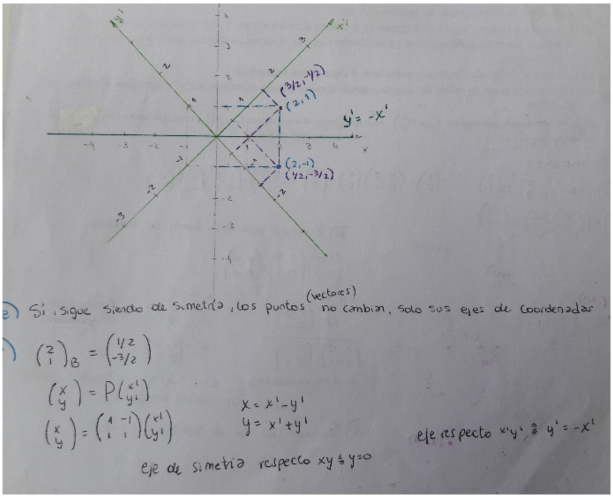
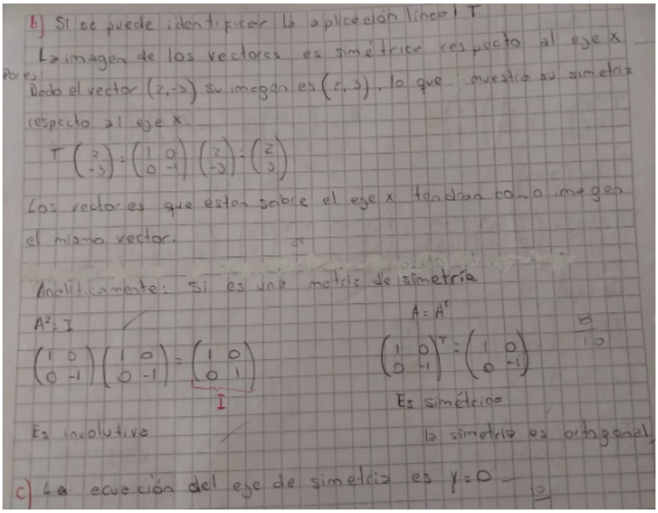
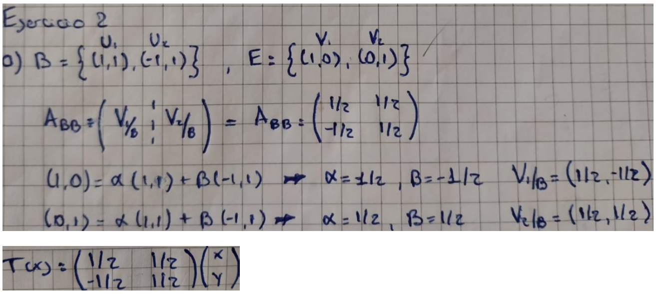
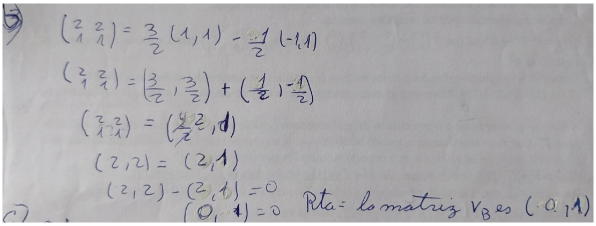
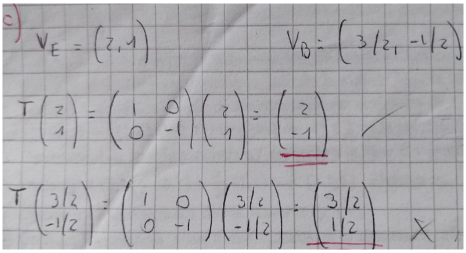
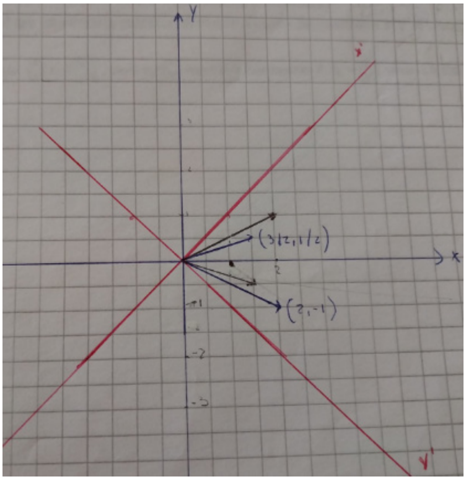
Figura 10</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabla 3. Ejemplos de los resultados de los ejercicios 1 y 2 de la ficha para los alumnos A2, A10 y A20.

EJERCICIO 1	
a) Los alumnos **A2, A10** y **A20** realizan correctamente este inciso, de forma similar a la resolución del alumno **A30**.	
b) y **c)** Se muestra la resolución del alumno **A2**.  **Figura 11**	Este alumno realiza una muy buena interpretación geométrica, explicando con ejemplos el porqué de la relación, entre los vectores y sus imágenes, corresponde a una transformación de simetría en el **sistema de referencia** *xy*. Posteriormente corrobora analíticamente lo que había deducido en forma geométrica.
EJERCICIO 2	
a) A20  **Figura 12**	El alumno **A20** comete un error conceptual al determinar la matriz asociada a T respecto a la base B. Intenta aplicar la definición de matriz asociada a una trasformación lineal respecto a otras bases, pero toma los elementos de la base incorrecta para realizar el procedimiento. Aplica el pensamiento AA. Encuentra una transformación de simetría errónea. Este error se arrastra y ocasiona la resolución incorrecta del inciso 2c)

e-ISSN: 2545-7012

b) A10  **Figura 13**	El alumno comete errores conceptuales: iguala una matriz de orden 2 con pares ordenados. Posteriormente, siguiendo ese razonamiento obtiene una igualdad de pares ordenados. Formando con la primera fila de la matriz un par ordenado, al cual iguala al vector del segundo miembro. Se visualiza un grave error conceptual en relación a temas estudiados con anterioridad.
c) A2  **Figura 14**	El alumno determina las imágenes de los vectores proporcionados en bases diferentes, aplicando la ley de transformación con respecto a la base canónica. Este fue un error común entre las resoluciones realizadas por los alumnos que obtuvieron bajo rendimiento.
d) A2  **Figura 15**	Al analizar el grafico, se puede inferir que el alumno no tiene un entendimiento sólido del concepto de cambio de base en espacios vectoriales, lo que a su vez afecta su comprensión del tema de cambio de base en transformaciones lineales. No determina analíticamente que las imágenes no cambian, sino que lo que cambia son sus coordenadas. En el grafico se observa que el alumno grafica el vector dado en diferentes bases en el sistema de referencia generado por la base canónica.
e) Ninguno de los alumnos resuelve este inciso.	
f) Ninguno de los alumnos realizó este inciso.	

4.2. Resultados del instrumento aplicado para la medición de la variable dependiente

Luego de la aplicación de las actividades didácticas se procedió a aplicar el instrumento con el cual se midió la variable dependiente. Asistieron al examen final 29 alumnos de los 42 que conformaron el grupo experimental y 37 de los 44 del grupo de control; se les dio 2 horas para la realización del mismo.

Se presenta a continuación la Tabla 4 con los promedios por inciso y el promedio de nota total del examen final, obtenidos por los alumnos de ambos grupos. Luego se muestra el análisis estadístico en función de los objetivos e hipótesis formulados.

Tabla 4. Nota promedio por inciso Evaluación Final.

EJERCICIO 1	INCISOS								TOTAL
	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h	
Puntaje del ejercicio	5	10	20	5	10	20	10	20	100
Grupo experimental	4,84	6,32	17,89	4,47	6,05	14,21	5,26	10,53	69,58
Grupo de control	2,49	1,49	3,92	0,81	0,81	0,95	0,14	0,00	10,60

Del procesamiento y análisis de los datos obtenidos, se realizó una comparación entre los resultados de ambos grupos, observándose una marcada diferencia entre ellos. En el grupo experimental, en donde se aplicaron los modos de pensamiento y los lenguajes, los resultados fueron muy satisfactorios; el estímulo proporcionado por los diferentes lenguajes en el planteo y diseño de los ejercicios y en la metodología utilizada en las clases teóricas y prácticas, favorecieron el aprendizaje del tema Cambio de Base en Endomorfismos de R^2. En cambio, los resultados obtenidos por los alumnos del grupo de control, en el que no se aplicaron las actividades didácticas propuestas, visibilizaron la poca comprensión del tema en estudio.

Se observó que el promedio de puntajes de la comisión de control es menor que el obtenido en el grupo de prueba, lo cual es muy favorable para los investigadores.

Se realizó una comparación estadística entre los promedios obtenidos por los alumnos del grupo de control y del grupo experimental tomando el examen final (posprueba). Dicha prueba estadística consistió en una prueba t de dos colas.

La hipótesis nula que se plantea es: "No existe diferencia significativa entre los puntajes de la comisión de prueba y comisión de control"

$$H_0 : \mu_{prueba} = \mu_{control}$$

Se compararon tanto los promedios como las varianzas de los dos grupos.

La Tabla 5 muestra las estadísticas obtenidas que fueron probadas a un nivel de significancia de $\alpha = 0,05$ (probabilidad de rechazar erróneamente la hipótesis nula del parámetro).

Tabla 5. Prueba t para muestras independientes.

n (exp.)	n control	$\bar{x}$ (exp.)	$\bar{x}$ control	F Var homog.	T	P	Prueba
29	37	69,58	10,59	$<0,0001$	8,31	$<0,0001$	Bilateral para varianzas no homogéneas

De la Tabla 5 se observa que el valor de probabilidad de testeo de la homogeneidad de la varianza es mucho menor que 0,05, mostrando que la dispersión de datos alrededor del promedio para los grupos experimental y de control son estadísticamente diferentes.

Debido a esta situación, la prueba t que se utilizó (datos de la tabla) corresponde al caso en que las varianzas son heterogéneas (Howell, 1997).

La prueba t para los promedios de los puntajes también da un valor de probabilidad significativamente menor que 0,05, lo cual permite descartar la hipótesis nula y decir que existe una diferencia significativa entre el rendimiento de los alumnos de los grupos experimental y de control.

La Tabla 6 muestra la comparación de los modos de pensamiento utilizados por los alumnos de los grupos experimental y de control, en la realización de la Evaluación Final. Teniendo en cuenta para ello el rango de notas que obtuvieron en la prueba.

Tabla 6. Modos de pensamientos grupo experimental y de control.

GRUPO EXPERIMENTAL	GRUPO DE CONTROL
Los estudiantes con notas entre 0 y 40 puntos hacen uso de un solo modo de pensamiento para responder a las preguntas planteadas, siendo este el modo de pensamiento AA. Es decir, mostraron habilidades algebraicas para resolver los ejercicios.	En este grupo de alumnos se visualizó que 26 de los 37, con puntaje entre 0 y 40, hacen uso del modo AA. Y que 4 de estos 26 realizaron el gráfico de vectores, pero solo en el sistema x,y (generado por la base canónica). Es decir, utilizan además el modo SG en su razonamiento. De los alumnos de este grupo, solo 8 no resolvieron la Evaluación Final. Se observó en este grupo que: 1) no hubo una buena predisposición para la resolución de los ejercicios y 2) no supieron realizar los ejercicios, en su gran mayoría, por no poseer los conceptos necesarios para el abordaje del tema.
Los alumnos que obtuvieron notas entre 40 y 60, hicieron uso de dos modos de pensamiento el AA y el AE.	Idem al Grupo Experimental
Los alumnos que obtuvieron notas superiores a los 60 y hasta 100 puntos hicieron uso de los tres modos de pensamiento: AA, AE y SG y lograron conectar los mismos para ayudarse en su razonamiento.	No hay alumnos con notas mayores a 60 puntos.

5. Discusión de los resultados obtenidos del análisis de la ficha de trabajo

Tras analizar trabajos basados sobre los modos de pensamiento en la resolución de problemas entre los que se destacan el de Sierpinska (2000) y Parraguez (2012), se llega a la conclusión de que la mayoría de los estudiantes tienden a adoptar el modo de pensamiento AA al enfrentarse a un problema. Los hallazgos de esta investigación respaldan esta observación, ya que muestran resultados similares, esto es, que el modo de pensamiento empleado, en la gran mayoría de las resoluciones de problemas por parte de los estudiantes, es el modo AA; les es más fácil emplear técnicas de resolución al abordar un problema que justificar y utilizar definiciones y/o propiedades en una resolución. También se advierte que los estudiantes enfrentan dificultades al cambiar de un modo de pensamiento a otro, por ejemplo, del modo SG al modo AA o viceversa. Es importante destacar que, en algunos casos, la representación geométrica se convirtió más en un obstáculo que en una ayuda para comprender el objeto de estudio, ya que algunos estudiantes no lograron desarrollar el pensamiento sintético geométrico.

Además, se observa que los alumnos con bajo rendimiento tienen dificultades en comprender cómo trabajar en bases distintas a la base canónica. Desde una perspectiva analítica, intentan determinar las imágenes de vectores proporcionados en bases diferentes a la canónica, utilizando la ley de transformación dada en la base canónica.

Desde un punto de vista geométrico, representan gráficamente los vectores dados respecto a diferentes bases, en el sistema de referencia generado por la base canónica (sistema de referencia xy).

Se puede inferir que estos errores son el resultado de una falta de comprensión del tema “cambio de base en espacios vectoriales”, el cual fue estudiado previamente. Ante estos resultados insatisfactorios, es evidente la necesidad de realizar un breve repaso del tema mencionado, antes de abordar el tema cambio de base en transformaciones lineales.

Un reducido grupo de alumnos logró transitar de un modo de pensamiento a otro. Es decir, mostraron una comprensión sólida del tema en estudio y obtuvieron la puntuación máxima.

Por los resultados obtenidos con el grupo experimental, es evidente que los modos de pensamiento representan una herramienta fundamental en el ámbito educativo, especialmente en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y en particular del tema cambio de base en endomorfismos (transformaciones lineales).

6. Conclusiones

De acuerdo a los resultados que proporcionó el instrumento Evaluación Final, se puede afirmar que el modo de pensamiento más utilizado por los alumnos en la resolución de los problemas propuestos es el modo AA.

El uso de fórmulas para resolver ejercicios sin una comprensión completa del concepto puede tener un impacto negativo en la comprensión de temas posteriores: matrices equivalentes, matrices semejantes, isometrías, diagonalización por semejanza, autovalores y autovectores, sistemas de ecuaciones diferenciales entre otros. Los estudiantes, en estas situaciones, tienden a abordar los problemas de manera mecánica durante la resolución de trabajos prácticos y exámenes parciales.

Se visualizó en ambos grupos, tanto en el experimental como en el de control, que los alumnos utilizan métodos o técnicas de resolución en la resolución de la mayoría de los ejercicios, pero tienen dificultades para moverse del ámbito algebraico al ámbito geométrico.

Se observó, en el grupo de control, que muchos estudiantes tuvieron dificultades para manipular adecuadamente la representación geométrica, lo cual se convirtió en un obstáculo para su aprendizaje, más que una ayuda en este caso.

Se observó que el 63% de los alumnos del grupo experimental, que tienen notas superiores a 60 puntos, lograron establecer la conexión entre los diferentes modos de pensamiento (AA, AE, SG) ayudados por la utilización de los diferentes lenguajes, evidenciando comprensión del tema en estudio. En cambio, se observó que en el grupo de control ningún alumno logró establecer la conexión entre estos tres modos de pensamiento.

Se pueden dar evidencias de que no todos los estudiantes, tanto del grupo experimental como de control, tienen un concepto geométrico del cambio de base en espacios vectoriales porque la mayoría de las veces se sitúan desde el álgebra para abordar y resolver los ejercicios. Esta limitación no solo afecta su desempeño en álgebra lineal, sino también su comprensión de los objetos matemáticos en general.

Las actividades didácticas propuestas para la enseñanza del tema Cambio de Base en Endomorfismo de R^2 constituyeron un apoyo para la comprensión y estudio del mismo, ya que es un tema de gran importancia tanto en la asignatura A.L.G.A. como en las distintas materias de las carreras de ingeniería.

La inserción de los distintos lenguajes matemáticos, como el aritmético, geométrico y algebraico, en la formulación de los problemas, junto con la aplicación de diversos modos de pensamiento según Sierpinska (2.000) y las estrategias de enseñanza según Díaz Barriga y Hernández Rojas (1.999), influyeron positivamente en el proceso de aprendizaje de los temas estudiados.

El uso de Geogebra en las actividades proporcionó a los estudiantes la oportunidad de desarrollar una comprensión más profunda y flexible de los conceptos, facilitando un tránsito más fluido entre los diferentes modos de pensamiento. Además, permitió al docente ofrecer clases más dinámicas y comprensibles.

Referencias

Bagley, S. (2015) *Uso del pensamiento computacional por parte de los estudiantes en álgebra lineal*. Consultado el 14 de octubre de 2023. https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-015-0022-x

Díaz Barriga, F. y Hernández Rojas, G. (1999) *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. México. Mc GRAW-Hill. Capítulos 5 y 6.

Harel, G. (1989a) Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, 89, 49-57. http://dx.doi.org/10.1111/j.1949-8594.1989.tb11889.x

Hernández Sampieri, R (2014) *Metodología de la Investigación* (6ta Edición) Colombia. Editorial Mc Graw Hill.

Hillel, J. (2000) *Modes of description and the problem of representation in linear algebra*. In On the teaching of linear algebra (pp. 191-207). Dordrecht. Springer Netherlands.

León, J. (2009*) Propuesta didáctica para propiciar un aprendizaje significativo de los espacios vectoriales*. Consultado el 14 de octubre de 2023.http://www.cidar.uneg.edu.ve/DB/bcuneg/EDOCS/TESIS/TESIS_POSTGRADO/MAESTRIAS/TGMLL46J682009JoseLeon.pdf.

Maturana Peña, I y Parraguez González, M. (2012). *Los modos de pensamiento en que el contexto de dimensión finita de un espacio vectorial real es comprendido por estudiantes universitarios*. Consultado el 14 de octubre de 2023. http://funes.uniandes.edu.co/4154/1/MaturanaLosmodosALME2012.pdf

Maracci**,** M. (2008). *Combining different theoretical perspectives for analyzing students' difficulties in vector spaces theory*. ZDM, 40, 265276. Consultado el 20 de octubre de 2023. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0078-z

Moore, G. H. (1995). *The axiomatization of linear algebra: 1875-1940.* Historia Mathematica, 22, 262-303. Consultado el 20 de octubre de 2023. http://dx.doi.org/10.1006/hmat.1995.1025

Oviedo, L. (2012). *Los Registros de representacion en matemática*. Revista aula universitaria. Universidad Nacional del Litoral. Consultado el 27 de noviembre de 2023. https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/publicaciones/index.php/AulaUniversitaria/article/download/4112/6207/

Parraguez, M. (2012) *Teoría los Modos de Pensamiento*, pp.1-80. Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Piaget, J. (1977a). *El lenguaje y el pensamiento en el niño*. Buenos Aires. Ed. Guadalupe

Sierpinska, A (2000). *On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra Mathematics*, en Education Library, On the Teaching of Linear Algebra (pp 209-246) Editorial Board.

Vygotski, L.S. (1964) *Pensamiento y lenguaje*. Buenos Aires. Editorial Lautaro.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Trigueros, M. y Dubinsky, E. (2002). *Learning linear algebra with ISETL*. Consultado el 22 de octubre de 2023. http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf

Rosana Mabel Colodro
Perfil académico y profesional: Profesora en Matemática y Fïsica (Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta), Especialista en Investigación Educativa y Magister en la Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior (Universidad Nacional de Tucumán). Profesora de Álgebra Lineal y Geometría Analítica y Matemática 1, en la Facultad de Ciencias Exactas (U.N.Sa.), y de Álgebra Lineal y Geometría Analítica en la Facultad de Ingeniería (U.N.Sa.). Investigadora en temas relacionados con la Enseñanza de la Matemática.

Correo electrónico: rosanacolodro1@gmail.com
Identificador ORCID: 0009-0007-1313-287X

Carlos Berejnoi
Perfil académico y profesional: Ingeniero Metalúrgico y Doctor en Ingeniería (Facultad de Ingeniería UNLP), y especialista en Entornos Virtuales de Aprendizaje (Organización de Estados Iberoamericanos). Profesor de Análisis Matemático I y Materiales (para Ingeniería Civil) en la Facultad de Ingeniería de la UNSa. Investigador en temas relacionados con la enseñanza de la Matemática y con Ciencia de Materiales: propiedades mecánicas de aleaciones mecánicas (cristalinas y amorfas) y estudio de la problemática de la transición dúctil frágil de aceros ferríticos.

Correo electrónico: berejnoi@gmail.com
Identificador ORCID: 0000-0001-8301-4579